



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

استفاده از فیلتر های ورقی برای متعادل سازی کanal، جهت
مقابله با اعوجاج غیرخطی و تداخل میان سمبولی در کanal های
دارای محوشدنگی ناشی از چند مسیرگی

Channel Equalization Method, Using Adaptive Filters, Combating Non-Linear Distortion and Intersymbol Interference for Multipath Fading Channels

دانشجو: محمدفؤاد آنقی

شماره دانشجویی: ۸۷۲۲۳۵۲۲

استاد راهنما: دکتر حمیدرضا امین داور

استاد داور دفاعیه: دکتر سید مصطفی صفوی همامی

یکی از ابتدایی ترین چالش هایی که پیش روی یک طراح سیستم های مخابراتی است، مواجهه با کanal ها و سیگنال هایی است که هیچ گونه اطلاعاتی از آن ها در دست نیست. به ناچار طراح می باشد روشی برای تخمین کanal بیابد و اهمیت شناسایی سیستم ها در این موقع به خوبی نمایان می شود. به علاوه تاثیر عواملی همچون نویز^۱ و اعوجاج غیر خطی^۲ بر روی سیگنال ها در کanal هایی که از محوشده^۳ سیگنال به علت پدیده چند مسیرگی^۴ رنج می برند، بازیابی سیگنال ارسالی در گیرنده را مشکل تر می سازد.

متعادلسازی^۵، یکی از مهم ترین راه حل ها برای مبارزه با اثر اعوجاج و تداخل میان سمبلی^۶، بالاخص در مخابرات بدون سیم که در آن امکان انتشار امواج از هر جسم فلزی به علت فرکانس بالای سیگنال وجود دارد، شناخته شده و به کار گرفته می شود. از طرفی وجود کanal هایی که پاسخ فرکانسی آن ها ذاتاً غیرخطی بوده و بعضاً پارامترهای کanal با گذشت زمان تغییر می کنند، لزوم تطبیقی^۷ بودن روش های متعادلسازی را یادآور می شود. از آن جایی که سیگنال دریافتی بر روی یک کanal غیرخطی تابعی از مقادیر گذشته سیگنال ارسالی بوده و هم چنین اعوجاج غیرخطی، خود نسبت به زمان متغیر و از یک مکان تا مکان دیگر متفاوت است، متعادلساز علاوه بر وفقی بودن باید غیرخطی نیز باشد.

روش ارائه شده در این گزارش جهت مقابله با عوامل مخرب سیگنال و بازیابی سیگنال اولیه از طریق متعادلسازی استفاده از نوعی فیلتر وفقی به نام همرشتاین فیلتر^۸ می باشد این فیلتر از دو بلوک که به صورت سری با یکدیگر قرار گرفته اند تشکیل شده است که یکی از آن ها دارای یک تابع تبدیل غیرخطی استاتیک و دیگری متشکل از یک تابع دینامیک خطی می باشد. قرار گرفتن سری این دو بلوک با کanal مخابراتی مجموعاً از طریق تخمین پارامترهای کanal و به روزرسانی ضرایب فیلتر، می تواند منجر به دریافت سیگنال ورودی با تقریب بسیار خوبی (از نقطه نظر منظومه سیگنال^۹) در

¹ Noise

² Nonlinear Distortion

³ Fading

⁴ Multipath

⁵ Equalization

⁶ Intersymbol Interference (ISI)

⁷ Adaptive

⁸ Hammerstein Filter

⁹ Signal Constellation

خروجی متعادلساز بشود که از تعداد خطای به مراتب کمتری نسبت به سیگنال دریافتی اولیه برخوردار باشد.

فهرست

بخش اول: مقدمات

- ۱-۱ المان های یک سیستم مخابراتی
- ۲-۱ کانال های مخابراتی و مشخصات آن ها
- ۱-۲-۱ کانال های مشکل از سیم مسی
- ۲-۲-۱ کانال های فیبر نوری
- ۳-۲-۱ کانال های الکترو مغناطیسی بدون سیم
- ۴-۲-۱ کانال های آکوستیک زیر آب
- ۳-۱ متعادل سازی (همسان سازی)
- ۱-۳-۱ افزایش نویز توسط متعادلساز
- ۲-۳-۱ انواع متعادلسازها
- ۳-۳-۱ طیف دو لایه و انتقال بدون ISI
- ۴-۳-۱ متعادلسازهای خطی
- الف- متعادلسازهای ZF (صفر اجباری)
- ب- متعادلساز MMSE
- ۵-۳-۱ تخمین رشته اطلاعات با بیشترین شباهت (MLSE)
- ۶-۳-۱ متعادل سازی فیدبک تصمیم

بخش دوم : متعادلسازی تطبیقی

- ۱-۲ متعادلسازی خطی تطبیقی
- ۱-۱-۲ ZF الگوریتم
- ۲-۱-۲ LMS الگوریتم
- ۲-۲ همسان ساز پسخور تصمیم وفقی
- ۳-۲ الگوریتم های کمترین مربعات بازگشتی (RLS) برای همسان ساز وفقی
- ۱-۳-۲ الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی (کالمن)
- ۴-۲ همسان سازی خود بازیاب (کور)
- ۱-۴-۲ همسان سازی کور مبتنی بر معیار حد اکثر تشابه
- ۲-۴-۲ الگوریتم های گرادیان آماری

۳-۴-۲ الگوریتم های همسان سازی کور مبتنی بر آمارگان مرتبه دوم و بالاتر سیگنال

بخش سوم : همرشتاین فیلترینگ

۱-۳ معرفی سیستم همرشتاین

۲-۳ الگوریتم نطبیقی برای مدل همرشتاین

۳-۳ متعامد سازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای

۴-۳ انتخاب اندازه حرکت (قدم)

۵-۳ پیچیدگی محاسباتی

۶-۳ پایداری فیلتر همرشتاین تطبیقی

بخش چهارم : نتایج شبیه سازی

ضمیمه ۱ : نتایج پیاده سازی الگوریتم توسط برنامه MATLAB

ضمیمه ۲: نتایج پیاده سازی الگوریتم LMS

منابع

بخش اول: مقدمات

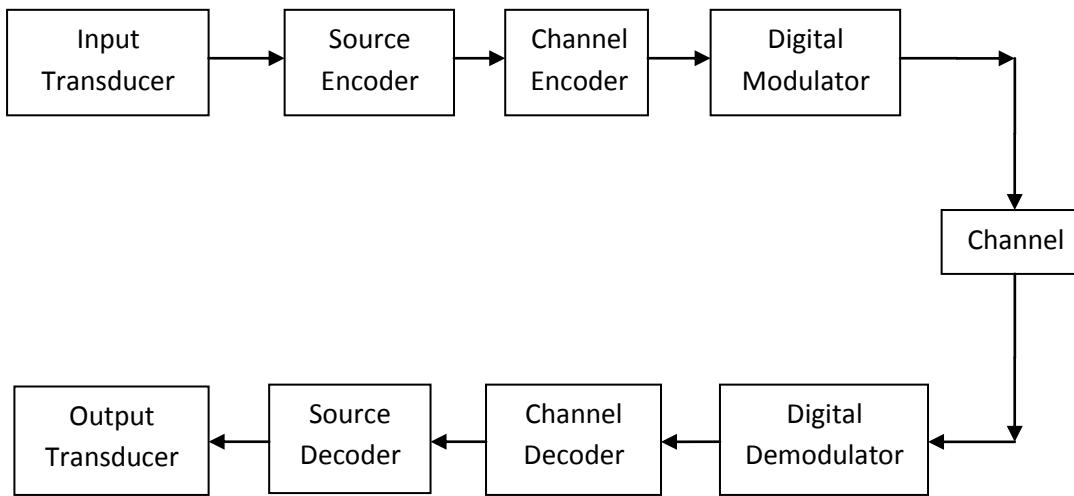
۱.۱ المان های یک سیستم مخابراتی

یکی از مهم ترین عواملی که تجزیه تحلیل و طراحی یک سیستم مخابراتی همواره به آن وابسته است، مشخصات کانال های فیزیکی است که اطلاعات بر روی آن ها ارسال می شوند. مشخصات کانال همواره بر روی نوع و تعداد بلوک هایی که یک سیستم مخابراتی را می سازند تاثیر مستقیم دارد، می توان گفت همواره آثاری که کانال مخابراتی بر روی سیگنال ارسالی دارد، در جهت تخریب سیگنال بوده و وظیفه طراح اصلاح این آثار مخرب و بازیابی سیگنال اصلی می باشد. آنچه مورد نظر این پایان نامه است، اساساً مبارزه با این آثار و ارائه راه حلی جهت بهبود دریافت، در گیرنده می باشد.

ابتدا به طور خلاصه به معرفی یک سیستم مخابراتی به صورت شماتیک پرداخته و به توضیح مختصری در این زمینه بسنده می کنیم؛ چرا که برداشت ما از سیستم مخابراتی به برداشت بهتری از مشکل پیش رو کمک خواهد کرد. شکل ۱-۱ بلوک دیاگرام اصلی ترین عناصر یک فرستنده و گیرنده دیجیتال را نشان می دهد.

خروجی منبع تولید سیگنال می تواند یک سیگنال آنالوگ همانند صوت و تصویر و یا یک سیگنال دیجیتال همانند دیتای خروجی از یک کامپیوتر باشد که در زمان گسته و حاوی تعداد محدودی

کاراکتر خروجی است. در مخابرات دیجیتال خروجی منبع هرچه که باشد ابتدا به صورت یک رشته باینری از اعداد تبدیل می‌شود. ما همواره به دنبال این هستیم که این خروجی را با کمترین تعداد بیتی



شکل ۱-۱ المان های یک سیستم مخابراتی

که ایجاد خطای نکند تولید کنیم. فرآیند تبدیل داده ورودی به رشته ای از اعداد باینری که توسط کارآمد ترین روش صورت گرفته باشد کدینگ منبع^۱ یا فشرده سازی داده نامیده می‌شود.

بیت های خروجی از کد کننده منبع که اکنون ما آن ها را رشته اطلاعات^۲ می‌نامیم وارد کد کننده کانال^۳ می‌شوند. هدف کد کننده کانال افزایش تعدادی بیت به رشته بیت اصلی است به طوری که با استفاده از این بیت ها در گیرنده بتوان بر آثاری هم چون نویز و تداخل موجود در کانال غلبه کرد و داده اصلی را دریافت نمود. می‌توان گفت استفاده از این بلوک جهت اطمینان دریافت اطلاعات به شکل صحیح تر در گیرنده بوده و تشخیص و تصحیح خطای^۴ را میسر می‌نماید.

اکنون زمان آن رسیده که دنباله کد شده داده وارد بلوک مدولاتور دیجیتال^۵ شود که در واقع واسطه^۶ ورود سیگنال به کانال می‌باشد. از آن جایی که تمام کانال های شناخته شده در طبیعت تنها قادر به انتقال سیگنال های الکتریکی (شکل موج) هستند طبیعی است اولین هدف این بلوک تبدیل دیتای دیجیتال به امواج قابل ارسال می‌باشد. در درجه دوم سیگنال هایی که در فرکانس پایین ارسال می-

¹ Source coding

² Information sequence

³ Channel Coder

⁴ Error Detection and Correction (CRC)

⁵ Digital Modulator

⁶ Interface

شوند همچون سیگنال صوتی دارای طول موجهای بلند خواهد بود. از آن جا که طول آرایه های آتن با طول موج^۱ سیگنال نسبت مستقیم دارد در این موقع ساخت آتن با ابعاد بسیار بزرگ برای چنین سیگنال هایی غیرممکن خواهد بود که این موضوع خود لزوم استفاده از مدولاتور را مؤکد می نماید. این مدولاسیون می تواند به صورت باینری و یا آرایه های چند بیتی در اشکال مختلف صورت گیرد.

کanal در واقع فضای ما بین فرستنده و گیرنده است و سیگنال با گذر از آن امکان دریافت سیگنال در فواصل بسیار دورتر را به ما می دهد. گذشته از نوع کanal (کanal بدون سیم همچون فضای آزاد (اتمسفر)، کanal تلفن همچون زوج سیم، فیبر نوری، ارتباط رادیویی) همواره سیگنال با گذر از زمان طی یک فرآیند اتفاقی آلوه می شود. این آلوگی می تواند ساز و کار های مختلفی از جمله نویز حرارتی تجمیعی، تولید شده توسط دستگاه های الکترونیکی، نویز تولیدی از منابع انسانی همچون اتومبیل و ماشین آلات، و یا نویز جوی همچون امواج ساطع شده از رعد و برق داشته باشد. بلوک-هایی که در گیرنده مشخص شده اند وظیفه ای معکوس با آن چه در فرستنده گفته شده بر عهده دارند تا در نهایت با غلبه بر این نوع آلوگی ها سیگنال ارسال شده را با درصد خطای حداقل به کاربر تحويل دهند.

همانطور که گفته شد بحث اساسی در این نوشه مقابله با آثار تخریب کننده سیگنال موجود در کanal می باشد. برای نیل به این هدف ابتدا باید اطلاعاتی در مورد انواع کanal های مخابراتی، مشخصه های هر یک و آثاری که بر روی هر یک می گذارند داشته باشیم. در بخش بعد به توضیح این مسئله خواهیم پرداخت.

۱ ۲ کanal های مخابراتی و مشخصات آن ها

همان طور که گفته شد کanal های مخابراتی رابط بین فرستنده و گیرنده می باشند، این رابط می-تواند متشکل از یک زوج سیم که سیگنال الکتریکی را منتقل می کند، فیبر نوری که در آن اطلاعات توسط یک پرتو نور مدوله شده انتقال داده می شود، و یا محیط زیر آب باشد که در آن از امواج آکوستیک برای انتقال داده بهره گرفته می شود.

عموماً یک مشکل عده در انتقال سیگنال، نویز تجمیعی است. منبع نویز می تواند قطعاتی همچون مقاومت ها و یا قطعات حالت جامد^۲ که از آن ها در طراحی سیستم مخابراتی استفاده می شود

¹ Wave Length

² Solid State

باشد. گاهی از این نویز به نویز حرارتی^۱ تعبیر می‌شود. منابع دیگر نویز و تداخل می‌تواند به صورت خارجی همچون تداخل ایجاد شده توسط دیگر کاربرهای کانال بر روی سیگنال ایجاد شود. از دیگر عوامل مخرب موجود در مورد یک سیگنال می‌توان به تضعیف سیگنال، اعوجاج فاز و دامنه و اعوجاج چند مسیرگی اشاره کرد.

یکی از راه‌های کاهش اثر نویز، افزایش توان سیگنال ارسالی است. اما در این مورد محدودیت‌هایی از قبیل اجزا به کار رفته در سیستم و دیگر مسایل عملی وجود دارند. عامل محدود کننده دیگر پهنهای باند موجود کانال است.

۱-۲-۱ کانال‌های متشکل از سیم مسی

شبکه تلفن به صورت گسترده‌ای از خطوط سیمی برای انتقال سیگنال صوتی و همچنین دیتا و ویدئو استفاده می‌کند. در واقع زوج سیم تابیده^۲ و کابل کواکسیال^۳ اولین کانال‌های الکترو مغناطیسی محافظت شده^۴ بودند که پهنهای باندی در حد قابل قبول ارائه می‌کردند. به طور کلی خطوط تلفن که کاربر را به مرکز مخابراتی متصل می‌کنند دارای پهنهای باند چند صد کیلوهرتز هستند. این در حالی است که این مقدار روی کابل کواکسیال تا چند مگاهرتز می‌رسد.

سیگنال‌های ارسالی بر روی این نوع کانال هم‌زمان از اعوجاج دامنه، اعوجاج فاز و نویز تجمیعی رنج می‌برند. هم چنین تداخل از کانال‌های همسایه^۵ بر روی این کانال‌ها بسیار رخ می‌دهد.

۱-۲-۲ کانال‌های فیبر نوری

در دو هه اخیر استفاده از فیبر نوری و تجهیزات آن رواج بسیاری یافته است پهنهای باند این کانال‌ها به صورت خیره کننده‌ای بالا بوده و اصلاً با کابل‌های کواکسیال قابل قیاس نیستند. این کانال‌ها از تضعیف سیگنال بسیار کمی برخوردار هستند، چرا که در انتقال سیگنال از پرتوهای نور (LED و یا لیزر) با شدت‌های مختلف برای انتقال داده استفاده می‌شود. از منابع نویز در کانال‌های فیبر نوری می‌توان به دیود‌های نوری و تقویت کننده‌های الکترونیکی اشاره کرد.

¹ Thermal noise

² Twisted pair wire line

³ Coaxial cable

⁴ Guided

⁵ Cross Talk Interference

۳-۲-۱ کانال های الکترومغناطیسی بدون سیم

در این روش برای ارسال سیگنال از تشعشعات ناشی از یک آنتن استفاده می شود که نوع و شکل آن بسته به فرکانس ارسال تغییر می کند. سه نوع اصلی انتقال در این روش وجود دارد: انتقال در خط دید (LOS)^۱، انتشار موج زمینی^۲ و انتشار امواج آسمانی^۳. از عوامل مخرب سیگنال در این نوع انتشار می توان به صاعقه ایجاد شده توسط شرایط جوی اشاره کرد. همچنین نویز ایجاد شده توسط بشر و نویز حرارتی در تجهیزات از دیگر این عوامل می باشند.

یکی دیگر از مشکلاتی که مرتباً در این نوع از مخابرات در فرکانس های بالا (HF) رخ می دهد پدیده چند مسیرگی است. علت وقوع آن رسیدن سیگنال به گیرنده از مسیرهای مختلف با تاخیر های مختلف است که منجر به پدیده هایی همچون تداخل میان سمبی می شود. محو شدگی از دیگر آثار این پدیده است که تقریباً هر شخصی هنگام گوش دادن به رادیو های شبانه یا صحبت کردن با تلفن همراه آن را تجربه کرده است.

از دیگر معضلات مرتبط با این نوع کانال ها می توان به مشکلات مربوط به انتشار همچون پراکندگی^۴، دور زدن موج به دور موانع (تفرق)^۵، انعکاس^۶، خم شدن موج در شرایط مختلف جوی^۷ و تلفات افت مسیر بسیار بالا اشاره کرد.

۴-۲-۱ کانال های آکوستیک زیر آب

در چند دهه گذشته فعالیت های جستجو در اقیانوس ها شروع شده و رو به افزایش بوده اند و همچنین ارسال دیتا از سنسور های تعییه شده در سطح اقیانوس به سطح خارج اقیانوس نیاز به مطالعه مخابرات زیر آب را افزایش بخشیده است.

امواج الکترومغناطیسی توانایی عبور در مسافت های طولانی زیر آب را ندارند مگر این که از فرکانس های بسیار پایین استفاده کنیم. اما حجم و اندازه بزرگ و توان بسیار بالای فرستنده مورد نیاز این نوع امواج هزینه این کار را بسیار بالا برده و آن را عملاً^۸ غیر ممکن می سازد. برای تضعیف

¹ Line of Sight

² Ground Waves

³ Sky Waves

⁴ Scattering

⁵ Diffraction

⁶ Reflection

⁷ Refraction

امواج الکترو مغناطیس در زیر آب از اصطلاح عمق پوستی^۱ استفاده می شود که تضعیف سیگنال را به نسبت $1/f$ نشان می دهد. برای آب دریا عمق پوستی به شکل $f/250 = \Delta$ بیان می شود که در آن f بر حسب فرکانس و Δ بر حسب متر است[8].

کانال های زیر آب به عنوان یکی از کانال های دارای محو شدگی ناشی از پدیده چند مسیرگی شناخته می شوند چرا که در آن ها سیگنال از سطح آب و همچنین از کف دریا منعکس می شود. به خاطر حالت موج بودن آب این انعکاس ها همواره با زمان تغییر می کنند و منجر به پدیده محو شدگی می شوند. به علاوه، تضعیف وابسته به فرکانس نیز در این کانال ها موجود است که تقریباً مقدار آن با مربع فرکانس برابر است.

نویز آکوستیک محیطی اقیانوس^۲ که توسط جاندارانی که در سطح اقیانوس زندگی می کنند ایجاد می شود، یکی از عوامل نویز برای کانال های زیر آب محسوب می شوند. هم چنین در نزدیکی بنادر، نویز آکوستیک ایجاد شده توسط بشر نیز به این معضلات دامن بیشتری می زند. اما در عین حال با طراحی مناسب می توان ارسال سیگنال آکوستیک در زیر دریا را برای مسافت های طولانی انجام داد.

اکنون که با انواع کانال های مخابراتی و خطراتی که سیگنال ارسالی را در راه رسیدن به گیرنده تهدید می کنند آشنا شدیم وقت آن رسیده که در پی یافتن راه حل هایی برای حل این مشکل باشیم. یکی از مهمترین روش هایی که برای احیای سیگنال در گیرنده صورت می گیرد متعادلسازی است که موضوع اصلی این گزارش را تشکیل می دهد. در ادامه و همچنین در فصول بعد به تفصیل به توضیح این مقوله می پردازیم.

۱ ۳ متعادلسازی (همسان سازی)

تا کنون دیدیم، که گستردگی تاخیر^۳ در سیگنال (سیگنال های دریافت شده از مسیر های مختلف مربوط به یک نمونه ارسالی) باعث به وجود آمدن تداخل میان سمبلی می شود. زمانی که نرخ نمونه برداری از سیگنال (بازه هر نمونه مدولاسیون) با میزان گسترش تاخیر کانال تقریباً برابر باشد ISI می تواند سطح خطای غیرقابل جبرانی به سیگنال ما اضافه کند. پردازش سیگنال ساختار بسیار قدرتمندی برای مقابله با ISI در نظر گرفته است. در یک مفهوم کلی، متعادلسازی به کلیه فعالیت هایی

¹ Skin Depth

² Ambient Ocean Acoustic Noise

³ Delay Spread

که در گیرنده جهت مقابله با تداخل میان سیمی ناشی از گسترش تاخیر کانال صورت می‌گیرد، اتلاق می‌شود. همچنین روش‌هایی از پردازش سیگنال در فرستنده وجود دارند که سیگنال را نسبت به کانال مقاوم‌تر و حساسیت آن را کمتر می‌کنند. به عنوان نمونه ای از این روش‌ها می‌توان به طیف گستردۀ^۱ و مدولاسیون چند حاملی^۲ اشاره کرد. معمولاً^۳ کاربردهایی که در آنها نرخ ارسال داده بیشتر باشد، نسبت به گسترش تاخیر حساس‌تر بوده و عموماً^۴ نیاز به متعادلساز‌های با کارایی بالا^۵ و یا دیگر تکنیک‌ها برای مقابله با ISI دارند. در واقع مبارزه با این مقوله از اساسی‌ترین چالش‌ها در مخابرات بدون سیم سرعت بالا است.

اساساً طراحی متعادلساز باید به گونه‌ای باشد که با کاهش اثر ISI موجب افزایش اثر نویز نشود چرا که نویز و سیگنال هر دو از متعادلساز عبور می‌کنند که این کار باعث افزایش نویز می‌شود. متعادلساز‌های غیرخطی کمتر از انواع خطی باعث افزایش اثر نویز می‌شوند اما همان‌طور که بعداً گفته خواهد شد طراحی آن‌ها از پیچیدگی بالاتری برخوردار خواهد بود. به علاوه متعادلساز‌ها عموماً از تخمینی از پاسخ ضربه یا پاسخ فرکانسی کانال برای مقابله با ISI استفاده می‌کنند. از آن‌جا که کانال بدون سیم با زمان تغییر می‌کند متعادلساز ابتدا تخمینی از پاسخ ضربه یا پاسخ فرکانسی کانال به دست می‌آورد (آموزش^۶). سپس تخمین خود از پاسخ فرکانسی را با تغییر کانال به روز می‌کند (دنباله روی^۷). از فرآیند آموزش و دنباله روی متعادلساز‌ها، معمولاً^۸ به متعادلسازی تطبیقی (وقی) یاد می‌شود که در مورد کانال‌هایی که تغییرات سریع دارند بسیار دشوار است. در ادامه فصل به ملاحظات مختلف مربوط به طراحی متعادلساز‌ها از جمله برقراری تعادل بین کاهش ISI و جلوگیری از افزایش نویز، مشخصات و طراحی متعادلساز‌های خطی و غیر خطی و فرآیند آموزش و دنباله روی خواهیم پرداخت.

طراحی متعادلساز می‌تواند در سه قسمت باند پایه^۹، RF^{۱۰} و یا IF^{۱۱} صورت پذیرد. اکثر متعادلساز‌ها به صورت دیجیتال و بعد از بلوک A/D طراحی می‌شوند چرا که این فیلترها علاوه بر اندازه کوچک و قیمت ارزان به سادگی قابل تنظیم بوده و از نظر مصرف توان بسیار به صرفه هستند.

¹ Spread Spectrum

² Multicarrier Modulation

³ High Performance

⁴ Training

⁵ Tracking

⁶ Baseband

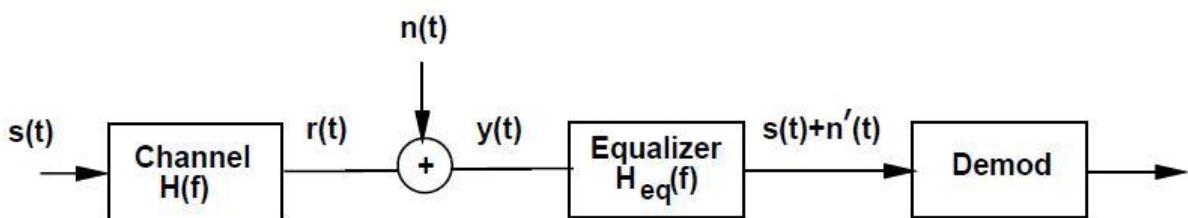
⁷ Radio Frequency

⁸ Intermediate Frequency

برای سادگی بیشتر قسمت مربوط به افزایش نویز را در فاز آنالوگ و بقیه قسمت های طراحی را در فاز دیجیتال بررسی خواهیم کرد.

۱-۳-۱ افزایش نویز توسط متعادلساز

شکل ۲-۱ یک سیستم گیرنده با متعادلساز آنالوگ را نشان می دهد که اثر افزایش نویز را به همراه ندارد. سیگنال $s(t)$ را که از کانال با پاسخ فرکانسی $H(f)$ عبور می کند در نظر بگیرید.



شکل ۲-۱ گیرنده به همراه متعادلساز

در ورودی گیرنده نویز سفید گاوی^۱ به سیگنال اصلی اضافه می شود. بنابراین سیگنال ورودی به گیرنده برابر است با $Y(f) = S(f)H(f) + N(f)$. این در حالی است که $N(f)$ دارای چگالی طیف توان^۲ N_0 می باشد. اگر پهنهای باند $s(t)$ برابر با B باشد توان نویز درون پهنهای باند سیگنال برابر با N_0B خواهد بود. فرض کنید می خواهیم سیگنال را به نحوی متعادلسازی کنیم که اثر ISI به طور کلی از آن حذف گردد. این مهم به سادگی با معرفی متعادلساز آنالوگ زیر در ورودی گیرنده محقق می گردد.

$$H_{eq}(f) = 1/H(f) \quad (1-1)$$

سیگنال گیرنده پس از عبور از بلوک متعادلساز به صورت $[S(f)H(f)+N(f)]H_{eq}(f)=S(f)+N'$ در خواهد آمد که در آن $N'(f)$ نویز رنگی گاوی با چگالی طیف توان^۳ $N_0/|H(f)|^2$ می باشد. بنابراین کل ISI از سیگنال جدا شده است $(S(f))$.

حال فرض کنید $H(f)$ در قسمت هایی از باند فرکانسی سیگنال $s(t)$ دارای گستگی طیفی^۳ باشد $(H(f_0) = 0, f_0)$. در این حالت توان نویز $N'(f)$ بی نهایت می شود. حتی اگر گستگی طیفی هم نباشد، اگر $H(f)$ در نقاطی سیگنال را به شدت تضعیف نماید، $H_{eq}(f)$ توان نویز را شدیداً تقویت

¹ White Gaussian Noise

² Power Spectral Density

³ Spectral Null

میکند. در این وضعیت حتی اگر ISI به طور کلی از سیگنال جدا شود باز هم متعادل‌ساز به علت کاهش شدید نسبت سیگنال به نویز عملکرد ضعیفی خواهد داشت. بنابراین هدف اصلی متعادل‌ساز برقراری هماهنگی ما بین کاهش اثر ISI و افزایش مقدار SNR می‌باشد. متعادل‌ساز‌های خطی دیجیتال بر اساس معکوس کردن پاسخ فرکانسی کانال کار کرده و بیشترین میزان افزایش نویز را دارند. در مقابل، متعادل‌ساز‌های غیر خطی چون از روش معکوس کردن کانال استفاده نمی‌کنند به میزان کمتری ایجاد چنین مشکلی می‌کنند.

۱-۳-۲ انواع متعادل‌ساز‌ها

عموماً متعادل‌ساز‌ها به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: خطی و غیر خطی. انواع خطی از نظر مفهومی قابل فهم تر بوده و از نظر پیاده سازی ساده تر هستند. اما چنانچه دیده شد این دسته دارای افزایش نویز بیشتری هستند و در کاربردهای عملی مخابرات بدون سیم کاربرد کمتری دارند. در بین روش‌های غیر خطی متعادل‌سازی DFE^۱ از این نظر که پیاده سازی ساده تر و کارایی قابل قبولی دارد، رایج تر است. اگر چه در مواقعي که نرخ SNR^۲ پایین است DFE ناچار از گسترش خط^۳ بوده و کارایی پایینی از خود نشان می‌دهد. یکی از روش‌های بهینه متعادل‌سازی روش MLSE می‌باشد. ایراد این روش آن است که پیچیدگی پیاده سازی آن به به صورت نمایی با طول گسترش تاخیر افزایش می‌یابد و بنابراین برای بسیاری از کانال‌ها غیر کاربردی می‌باشد. شکل ۱-۳ نمایش کلی از انواع متعادل‌ساز‌های شناخته شده و روش‌های به روز کردن ضرایب را نشان می‌دهد.

در دسته دیگر متعادل‌ساز‌ها به دو گروه سمبول به سمبول (SBS)^۴ و یا تخمین گر رشته اطلاعات^۵ تقسیم می‌شوند. متعادل‌ساز‌های SBS، ISI را از هر سمبول جدا کرده و هر سمبول را به صورت جداگانه آشکار می‌کنند. انواع متعادل‌ساز‌های خطی شکل ۱-۳ و همچنین روش DFE از این دسته هستند. در روش SE آرایه ای از سمبول‌ها آشکار می‌شوند، بنابراین اثر ISI بخشی از فرآیند تخمین است. در مورد MLSE می‌توان گفت، یک روش بهینه از آشکار سازی اطلاعات است ولی بسیار پیچیده می‌باشد.

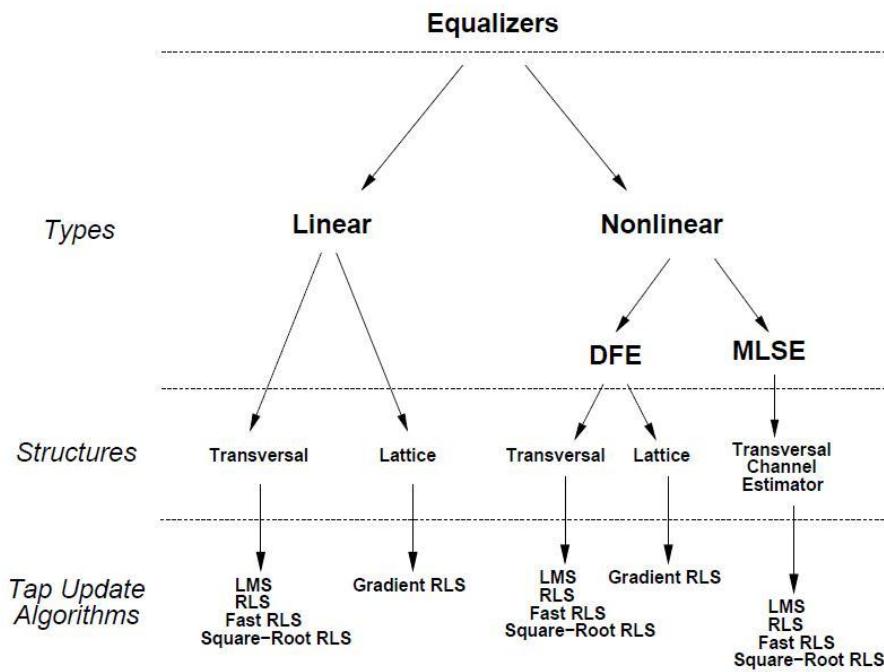
¹ Decision Feedback Equalization

² Signal to Noise Ratio

³ Maximum likelihood Sequence Estimation

⁴ Symbol By Symbol

⁵ Sequence Estimator



شکل ۱-۳ انواع متعادلسازها

کلیه متعادلسازها اساساً به دو روش متقاطع^۱ و شبکه ای^۲ پیاده سازی می شوند. روش متقاطع مشکل از یک فیلتر با $N-1$ المان تاخیر و N ضریب مختلط قابل تنظیم می باشد. ساختار شبکه ای از یک مدل بازگشتی پیچیده تر استفاده می کند. در مقابل این پیچیدگی این ساختار دارای پایداری عددی بهتر و همگرایی سریع تر و انعطاف پذیری بهتر در برابر تغییر طول می باشد. علاوه بر نوع و ساختار، متعادلسازهای تطبیقی نیاز به روشی برای به روز کردن ضرایب فیلتر دارند. این روش ها نیاز دارند که هماهنگی قابل قبولی بین پیچیدگی و نرخ همگرایی و پایداری عددی برقرار کنند.

۱-۳-۳ طیف دو لایه^۳ و انتقال بدون ISI

نوعاً متعادلسازها به صورت دیجیتال ساخته می شوند. شکل ۱-۴ بلوک دیاگرام از ابتدا تا انتهای یک سیستم را نشان می دهد که دارای یک متعادلساز دیجیتال است. سیگنال ورودی d_k از یک فیلتر شکل پالس $g(t)$ عبور کرده و سپس از طریق کانال حاوی ISI، $c(t)$ ، ارسال می شود. بنابراین کانال معادل به شکل $h(t) = g(t) * c(t)$ خواهد بود که در آن، $d(t) = \sum d_k \delta(t - kT_s)$ قطر اسیگنال ارسلانی به صورت

¹ Transversal

² Lattice

³ Folded Spectrum

در گیرنده نویز سفید گاوی $n(t)$ به آن اضافه شده که خروجی نهایی $w(t)$ را می‌سازد. این سیگنال پس از عبور از یک فیلتر منطبق آنالوگ^۱ $(-t)^m g^*$ ، و به دست آوردن $y(t)$ از یک مبدل آنالوگ به دیجیتال A/D نیز عبور می‌کند. این واقعیت که $y(t)$ نمی‌تواند دقیقاً با $h(t)$ منطبق باشد، کارایی سیستم را به شدت کاهش می‌دهد و حساسیت به زمانبندی^۲ بسیار بالا می‌رود. برای رفع این مشکل از $y(t)$ با چند برابر نرخ ارسال نمونه برداری می‌کنیم و سیگنال حاصله را برای متعادلسازی می‌فرستیم. به این کار متعادلسازی با فاصله گذاری جزیی^۳ گفته می‌شود.

سپس خروجی متعادلساز تخمینی از سیگنال ورودی را ارائه می‌دهد. در اینجا سیگنال از یک بلوک تصمیم عبور می‌کند که سیگنال حاصله را به سمبی که در الفبای سیگنال ارسالی باشد گرد می‌کند. در مرحله آموزش سیگنال متعادلسازی شده از بلوک به روز کردن ضرایب عبور می‌کند تا ضرایب را طوری تغییر دهد که خروجی متعادلساز با رشتہ آموزش از قبل تعیین شده هماهنگ شود و در فرآیند دنباله روی از خطای حاصل از بلوک تصمیم جهت تنظیم ضرایب متعادلساز استفاده می‌شود.

فرض کنید $f(t)$ ترکیبی از توابع تبدیل پاسخ ضربه باند پایه فرستنده، کانال و فیلتر منطبق باشد.

$$f(t) = g(t) * c(t) * g^*(-t) \quad (1-2)$$

در این حالت خروجی فیلتر منطبق خواهد بود

$$y(t) = d(t) * f(t) + n_g(t) = \sum d_k f(t - kT) + n_g(t) \quad (1-3)$$

در حالی که $n_g(t) = n(t) * g^*(-t)$ معادل نویز باند پایه در ورودی متعادلساز و T زمان هر سمبی است. اگر فرض کنیم $f[n] = f(nT_s)$ بیان گر نمونه های $f(t)$ در هر T_s ثانیه باشد، با نمونه گیری از $y(t)$ در هر T_s ثانیه، سیگنال گستته در زمان $y[n] = y(nT_s)$ را به صورت زیر خواهیم داشت

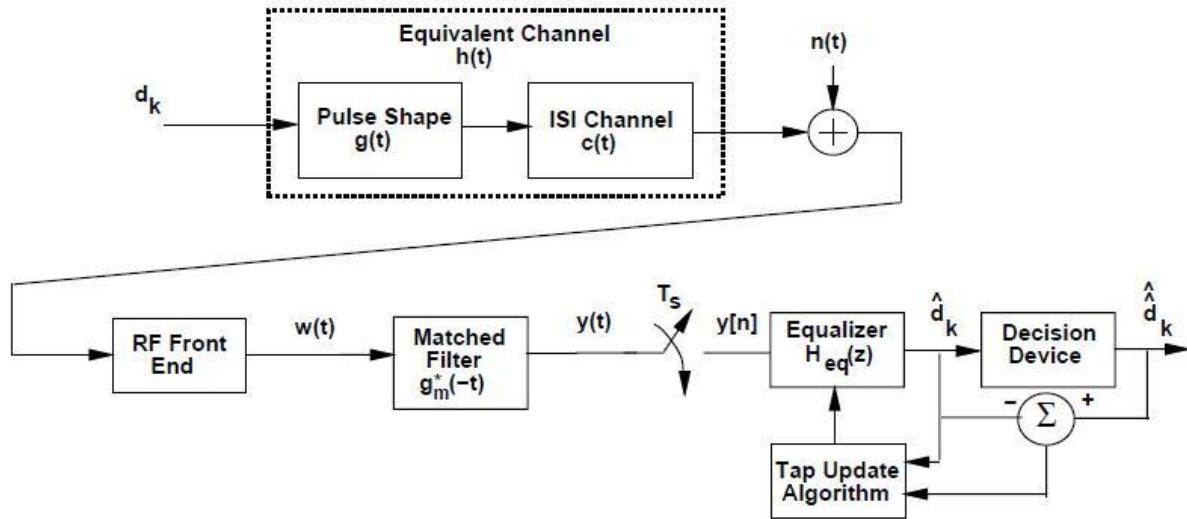
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum d_k f(nT_s - kT_s) + n_g(nT_s) \\ &= \sum d_k f[n-k] + v[n] \\ &= d_n f_0 + \sum d_k f[n-k] + v[n] \end{aligned} \quad (1-4)$$

¹ Analog Matched Filter

² Timing Sensitivity

³ Fractionally Spaced Equalization

در عبارت بالا، بخش اول نشان دهنده بیت های داده مطلوب، بخش دوم نمایان گر ISI و بخش سوم معرف نویز می باشد. واضح است برای داشتن یک ارتباط بدون ISI باید $n \neq k$ باشد. $f[n-k] = 0$ باید $n = k$ باشد. یعنی $y[n] = d_n f[0] + v[n]$ و رابطه بالا به شکل $f[k] = \delta[k]f[0]$ در خواهد آمد.



شکل ۱-۴ بلوک دیاگرام از ابتدا تا انتها

می توان اثبات کرد که برای داشتن یک ارتباط بدون ISI، $f[k] = \delta[k]f[0]$ باید داشته باشیم

$$F_{\Sigma}(f) \triangleq \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(f + \frac{n}{T_s}) = f[0] \quad (1-5)$$

تابع $F_{\Sigma}(f)$ گاهای^۱ به طیف دو لایه (تا شده) تعبیر می شود و $F_{\Sigma}(f) = f(0)$ بیانگر صاف^۱ بودن طیف دو لایه می باشد.

۱-۳-۴ متعادلساز های خطی

در قسمت قبل دیدیم که اگر $F_{\Sigma}(f)$ کاملاً صاف نباشد می توانیم از بلوک متعادلساز در شکل ۱-۴ جهت کاهش ISI استفاده کنیم. در این بخش برای پیاده سازی این بلوک ما از یک متعادلساز خطی که توسط یک فیلتر متقاطع با $N = 2L+1$ ضریب پیاده سازی می شود استفاده می کنیم

$$H_{eq}(z) = \sum_{i=-L}^L w_i z^{-i} \quad (1-6)$$

معمولای طول متعادلساز، N ، توسط ملاحظات پیاده سازی تعیین می شود چرا که با افزایش N پیچیدگی محاسبات بیشتر می شود. متعادلساز های خطی علی دارای $w_i = 0$ برای $i < 0$ هستند. برای

^۱ Flat

یک طول مشخص و پاسخ فرکانسی کانال داده شده، طراحی متعادلساز باید وزن ضرائب $\{w_i\}_{i=-L}^L$ و الگوریتمی که این ضرایب را با تغییر کانال به روز کند ارائه دهد. معیار ما در مخابرات بدون سیم احتمال بروز خطأ^۱ می باشد. بنابراین بهینه ترین انتخاب ما جهت ضرایب متعادلسازی ضرایبی هستند که احتمال خطأ را به حداقل برسانند. از آن جایی که ما نمی توانیم مستقیماً روشی برای بهینه سازی ضرایب در جهت نیل به معیار خود داشته باشیم، ناچاریم از روشی غیر مستقیم برای برقراری تعادلی ما بین کاهش ISI و عدم افزایش نویز استفاده کنیم. در این بخش به بررسی دو متعادلساز خطی می-پردازیم: متعادلساز ZF^۲ و متعادلساز MMSE^۳. روش اول می تواند به کلی اثر ISI را از بین ببرد و لی به شدت نویز را افزایش می دهد. تکنیک دوم میانگین مربع خطأ بین سمبل های ارسالی و سمبل-های آشکار شده در خروجی متعادلساز را می نیم می کند، در حالی که تعادل بهتری بین مقابله با ISI و افزایش نویز بر فرار می کند. به دلیل همین تعادل مطلوب، متعادلساز های MMSE کارایی بهتری از نقطه نظر نرخ خطای بیت نسبت به متعادلساز هایی که از الگوریتم ZF استفاده می کنند دارند.

الف) متعادلساز های ZF (صفر اجباری)

نمونه های ورودی به متعادلساز $\{y_n\}$ می توانند بر اساس پاسخ ترکیبی سیستم گسته سازی شده $f(t)$ به صورت زیر بیان شوند

$$Y(z) = D(z)F(z) + N_g(z) \quad (1-7)$$

که در آن $N_g(z)$ طیف توان نویز سفید پس از گذر از فیلتر منطبق $(\frac{1}{Z^*})_m G^* G$ می باشد و

$$F(z) = H(z) G^* (\frac{1}{Z^*})_m = \sum f(nT_s) z^{-n} \quad (1-8)$$

متعادلساز ZF کل ISI موجود در پاسخ ترکیبی $f(t)$ را از بین می برد. چنین متعادلسازی با رابطه

$$H_{ZF}(z) = 1/F(z) \quad (1-9)$$

بیان می شود. این رابطه معادل گسته در زمان متعادلساز آنالوگی است که قبل تر توضیح داده شد و همان مشخصات را از نظر افزایش نویز دارد. به طور مشخص طیف توان $N(z)$ به صورت زیر داده می شود:

¹ Probability of Error(Outage Probability)

² Zero Forcing

³ Minimum Mean Square Error

$$N(z) = N_g(z) |H_{ZF}(z)|^2 = \frac{N_0 \left| G_m^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \right|^2}{|F(z)|^2} = \frac{N_0 \left| G_m^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \right|^2}{|H(z)|^2 \left| G_m^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \right|^2} = \frac{N_0}{|H(z)|^2} \quad (1-10)$$

از رابطه فوق مشخص می شود در صورتی که کanal $H(z)$ در فرکانس خاصی از پهنهای باندش ناگهانی تضعیف شود (کanal داری محو شدگی ناشی از انتخاب فرکانس)¹ توان نویز به شدت افزایش می یابد. متعادلساز ZF که به صورت $H_{ZF}(z) = \frac{1}{F(z)}$ بیان می شود ممکن است به صورت یک فیلتر با پاسخ ضربه محدود² قابل پیاده سازی نباشد. همچنین ممکن است یک مجموعه محدود از ضرایب w_L, \dots, w_{-L} نتوان یافت که رابطه زیر را برقرار سازند.

$$w_{-L}z^L + \dots + w_Lz^{-L} = \frac{1}{F(z)} \quad (1-11)$$

در این صورت ما ضرایب $\{W_i\}$ را به طوری به دست می آوریم که بهترین تخمین از متعادل‌ساز ZF را داشته باشیم. قطعاً این راه حل یکتا و سهل الوصول نخواهد بود چرا که می باشد برای تمامی مقادیر z صادق باشد. روش‌های مختلفی برای دستیابی برای این تخمین وجود دارد. یک تکنیک آن است که $H_{ZF}(z)$ را به صورت یک فیلتر با پاسخ ضربه نا محدود^۳ بیان کرد، $\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^{-i} = \frac{1}{F(z)}$ و سپس $c_i = w_i$ را تنظیم کرد. می توان نشان داد برای $z = e^{jw}$ این مفروضات رابطه زیر را می نیمی کند

$$\left| \frac{1}{F(z)} - w_{-L}z^L \dots w_Lz^{-L} \right|^2 \quad (1-12)$$

همچنین ضرایب می توانند طوری تنظیم شوند که اعوچاچ پیک³ (بد ترین نوع ISI) را کاهش دهد.

ب) متعادلساز MMSE

در این نوع از متعادلسازی هدف از طراحی متعادلساز حداقل کردن میانگین مربع خطای میانگین مربع خطای متعادلساز \hat{d}_k است. به عبارت بهتر، $\{w_i\}$ ها به سمبول ارسالی d_k و سمبول دریافتی در خروجی متعادلساز \hat{d}_k است. از آن جایی که MMSE یک روش خطی نوعی انتخاب می‌شوند که $E[d_k - \hat{d}_k]^2$ را می‌نیم کنند. برای متعادلسازی است خروجی آن \hat{d}_k ترکیبی خطی از نمونه‌های ورودی است $y[k]$

¹ Frequency Selective Fading Channels

² Finite Impulse Response (FIR)

³ Infini t Impulse Response(IIR)

4 Peak Distortion

$$\hat{d}_k = \sum_{i=-L}^L w_i y[k-i] \quad (1-13)$$

طبق معمول یافتن ضرایب بهینه برای فیلتر $\{w_i\}$ مشکل استاندارد در تخمین خطی است. در حقیقت اگر نویز ورودی به فیلتر سفید باشد این یک مسئله فیلترینگ ویینر¹ استاندارد خواهد بود. با این حال به علت وجود فیلتر منطبق $(t - m)^*$ در ورودی گیرنده، نویز ورودی به متعادلساز نه تنها سفید نبود بلکه رنگی با طیف توان $\left|G_m^*(\frac{1}{z^*})\right|^2 N_0$ خواهد بود. بنابراین جهت به کار گیری روش های شناخته شده برای تقریب خطی بهینه ما فیلتر را به دو قسمت تقسیم می کنیم: یک بخش سفید کننده نویز و یک بخش حذف کننده ISI. شکل ۱-۵ این مجموعه را نشان می دهد.

وظیفه بلوک سفید کننده نویز همانطور که از اسم آن پیداست سفید کردن نویز است به طوری که نویز خروجی از این فیلتر دارای طیف توان ثابت باشد. از آن جایی که نویز ورودی به گیرنده دارای طیف توان $\left|G_m^*(\frac{1}{z^*})\right|^2 N_0$ می باشد بهترین فیلتر سفید کننده نویز به صورت $1/G_m^*(\frac{1}{z^*})$ خواهد بود. البته این فیلتر تنها انتخاب ما نخواهد بود و ما می توانیم از فیلتر های دیگری با مشخصات بهتر (مثل پایداری) نیز استفاده کنیم. ممکن است ابتدا این فکر که ما از فیلتر منطبق در ورودی گیرنده استفاده می کنیم و بعد در متعادلساز اثر آن را حذف می کنیم غیر طبیعی به نظر آید در حالی که هدف ما از استفاده از این فیلتر افزایش SNR قبل از نمونه برداری بوده است. کل این مجموعه طراحی متعادلساز را برای ما در جهت می نیم کردن میانگین مربعات خطای ساده تر می کند.

فرض می کنیم فیلتر $(z) \hat{H}_{eq}$ یک فیلتر خطی با ورودی v_n و $N = 2L + 1$ ضریب می باشد

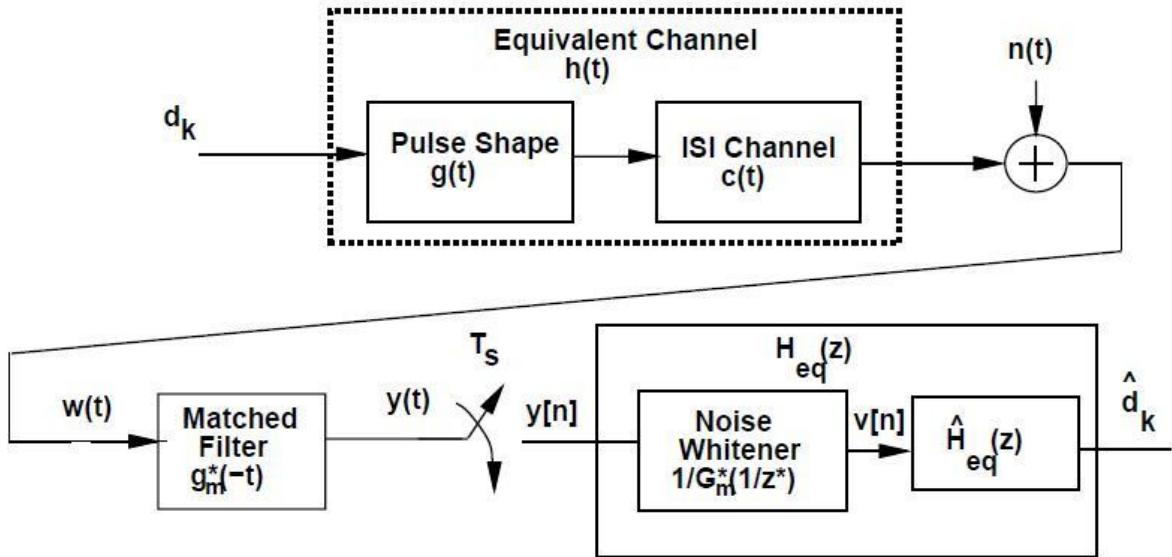
$$\hat{H}_{eq}(z) = \sum_{i=-L}^L w_i z^{-i} \quad (1-14)$$

هدف ما طراحی ضرایب $\{w_i\}$ به طوریست که $E[d_k - \hat{d}_k]^2$ می نیم شود. به عنوان بردار ورودیها به $(z) \hat{H}_{eq}$ بردار $v = (v[k+L], v[k+L-1], \dots, v[k-L]) = (v_{k+L}, v_{k+L-1}, \dots, v_{k-L})$ را بدست آورده خروجی فیلتر \hat{d}_k و بردار $(w_{-L}, \dots, w_L) = w$ را به عنوان بردار ضرایب فیلتر معرفی می کنیم. بنابراین خواهیم داشت

$$\hat{d}_k = w^T v = v^T w \quad (1-15)$$

و می خواهیم که میانگین مربع خطای را می نیم کنیم

¹ Weiner Filtering



شکل ۱-۵ متعادلسازی به روش MMSE

$$J = E[d_k - \hat{d}_k]^2 = E[w^T v v^H w^* - 2R\{v^H w^* d_k\} + |d_k|^2] \quad (1-16)$$

v_d و $M_v = E[v v^H]$ را تعریف می کنیم. ما تریس M_v یک ماتریس هرمیتی^۱ $N^* N$ و $v_d = E[v^H d_k]$ یک بردار سط्रی با طول N است. فرض کنید $E[dk]^2 = 1$. برای J ، MSE خواهد بود

$$J = w^T M_v w^* - 2R\{v_d w^*\} + 1 \quad (1-17)$$

ما بردار ضرائب بهینه را با تنظیم کردن گرادیان^۲ $\nabla_w J = 0$ و حل کردن آن برای w بدست می آوریم. از رابطه بالا، گرادیان به صورت زیر داده می شود

$$\nabla_w J = \left(\frac{\partial J}{\partial w_{-L}}, \dots, \frac{\partial J}{\partial w_L} \right) = 2w^T M_v - 2v_d \quad (1-18)$$

تساوی این عبارت با صفر نتیجه می دهد که $w^T + M_v = v_d$ و بردار ضرائب بهینه به صورت

$$w_{\text{opt}} = (M_v^T)^{-1} v_d^T \quad (1-19)$$

خواهد بود. حل معادله برای w_{opt} نیاز به معکوس کردن ماتریس با توجه به ورودی های فیلتر دارد. بنابراین پیچیدگی محاسباتی^۳ بسیار بالا و در مراتب N^2 یا N^3 عملیات است. با جایگزینی در این بردارهای ضرائب بهینه، ما مربع میانگین خط را به صورت زیر خواهیم داشت

¹ Hermitian

² Gradient

³ Computational Complexity

$$J_{\min} = 1 - \mathbf{v}_d \mathbf{M}_v^{-1} \mathbf{v}_d^H \quad (1-20)$$

برای یک متعادلساز با طول نامحدود داریم

$$\mathbf{v} = (v_{n+\infty}, \dots, v_n, \dots, v_{n-\infty}) \quad (1-21)$$

$$\mathbf{w} = (w_{-\infty}, \dots, w_0, \dots, w_{\infty}) \quad (1-22)$$

در این حالت می توانیم معادله $\mathbf{w}^T \mathbf{M}_v \mathbf{w} = v_d$ را به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} w_i (f[j-i] + N_0) \delta[j-i] = g_m^*[-j], \quad -\infty \leq j \leq \infty \quad (1-23)$$

با استفاده از تبدیل z و پادآوری آنکه $\hat{H}_{eq}(z)$ تبدیل z ضرائب فیلتر w است داریم

$$\hat{H}_{eq}(z) = \frac{G_m^*(\frac{1}{z^*})}{F(z) + N_0} \quad (1-24)$$

از آنجایی که متعادلساز MMSE از دو بخش فیلتر سفید کننده نویز و بخش حذف کننده ISI تشکیل شده است، متوجه می شویم در صورت عدم وجود محدودیت طول خواهیم داشت

$$H_{eq}(z) = \frac{\hat{H}_{eq}(z)}{G_m^*(\frac{1}{z^*})} \quad (1-25)$$

سه موضوع قابل توجه در رابطه با این نتیجه گیری وجود دارد. اول اینکه متعادلساز MMSE با طول نامحدود ایده آل، اثر فیلتر سفید کننده نویز را از بین می برد. ثانیاً این فیلتر با طول نامحدود در صورت نبودن نویز (قسمت N_0) همانند متعادلساز ZF بوده و نتیجه یکسانی دارند. در نهایت این طراحی متعادلساز ایده آل نمونه خوبی از معکوس کردن کانال و تعادل آن با افزایش نویز می باشد. در صورت افزایش نویز شدید در برخی فرکانسها، N_0 در مخرج مانع از افزایش شدید نویز توسط متعادلساز می شود. با این حال در فرکانس هایی که چگالی طیف توان نویز N_0 در مقایسه با کانال $F(z)$ کوچک باشد، متعادلساز به طور موثری $F(z)$ را معکوس می کند.

برای متعادلساز بالا میتوان نشان داد که MSE می نیم بر حسب طیف دو لایه به صورت زیر قابل بیان است

$$J_{\min} = T_s \int_{-0.5/T_s}^{0.5/T_s} \frac{N_0}{F_{\Sigma}(f) + N_0} df \quad (1-26)$$

این نوع بیان از MMSE مشخصه های جالب گوناگونی دارد. اولاً^۱ می توان نشان داد همانطور که حدس زده می شد $1 \leq J_{\min} = E[d_k - \hat{d}_k]^2 \leq 0$. بعلاوه مادامی که در پهنهای باند مطلوب سیگنال $N_0(f) \neq 0$ باشد، در صورت عدم حضور نویز $J_{\min} = 0$ خواهد شد. همچنین اگر $J_{\min} = 1$

۱-۳-۵ تخمین رشته اطلاعات با بیشترین شباهت (MLSE)

روش MLSE باعث افزایش نویز نمی شود چرا که در متعادلسازی از فیلترینگ استفاده نمی کند و در عوض به تخمین سمبلهای ارسالی می پردازد. ساختار این متعادلساز همانند شکل ۱-۴ می باشد، با این تغییر که در آن بلوک های متعادلسازی و تصمیم گیری با الگوریتم MLSE جایگزین شده اند. برای یک پاسخ کانال دلخواه $h(t)$ ، آن رشته ورودی $\{d_k\}$ را انتخاب می کند که بیشترین شباهت را به سیگنال دریافتی $w(t)$ داشته باشد.

با استفاده از فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت^۱ می توانیم $w(t)$ را در بازه زمانی $[0, LT_s]$ به شکل زیر بیان کنیم

$$w(t) = \sum_{n=1}^N w_n \varphi_n(t) \quad (1-27)$$

که در آن $\{\varphi_n(t)\}$ مجموعه کاملی از بردارهای متعامد را تشکیل می دهد. از آنجایی که $w(t)$ در بازه $[0, LT_s]$ به d_0, \dots, d_L بستگی دارد، عدد N از توابع این مجموعه، تابعی از حافظه کانال می باشد. با بسط این رابطه خواهیم داشت

$$w_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k h_{nk} + v_n = \sum_{k=0}^L d_k h_{nk} + v_n \quad (1-28)$$

که در آن :

$$h_{nk} = \int_0^{LT_s} h(t - kT_s) \varphi_n^*(t) dt \quad (1-29)$$

$$v_n = \int_0^{LT_s} n(t) \varphi_n^*(t) dt \quad (1-30)$$

v_n ها متغیرهای تصادفی گاوی مختلط با میانگین صفر و کواریانس $N_0 \delta[n-m]$ هستند. بنابراین $w = (w_1, \dots, w_N)$ دارای توزیع گاوی چند متغیره زیر خواهد بود

¹ Gram-Schmidt Process

$$p(w^N | d^L, h(t)) = \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{\pi N_0} \exp \left[-\frac{1}{N_0} |w_n - \sum_{k=0}^L d_k h_{nk}|^2 \right] \right] \quad (1-31)$$

بنابراین برای یک سیگنال دریافتی $w(t)$ یا به طور معادل w^N ، MLSE آن را به صورت رشته سمبول d^L رمزگشائی می کند، به طوریکه تابع شbahت $p(w^N | d^L, h(t))$ (یا لگاریتم این تابع) ماکزیمم شود. یعنی MLSE دنباله خروجی را به شکل زیر خواهد داشت

$$\hat{d}^L = \operatorname{argmax}[\log p(w^N | d^L, h(t))] \\ = \operatorname{argmax}[2R\{\sum_k d_k^* \sum_{n=1}^N w_n h_{nk}^*\} - \sum_k \sum_m d_k d_m^* \sum_{n=1}^N h_{nk} h_{nm}^*] \quad (1-32)$$

و با معادل سازی سیگماهای فوق با مقادیر $y[n]$ و $f[k-m]$ خواهیم داشت

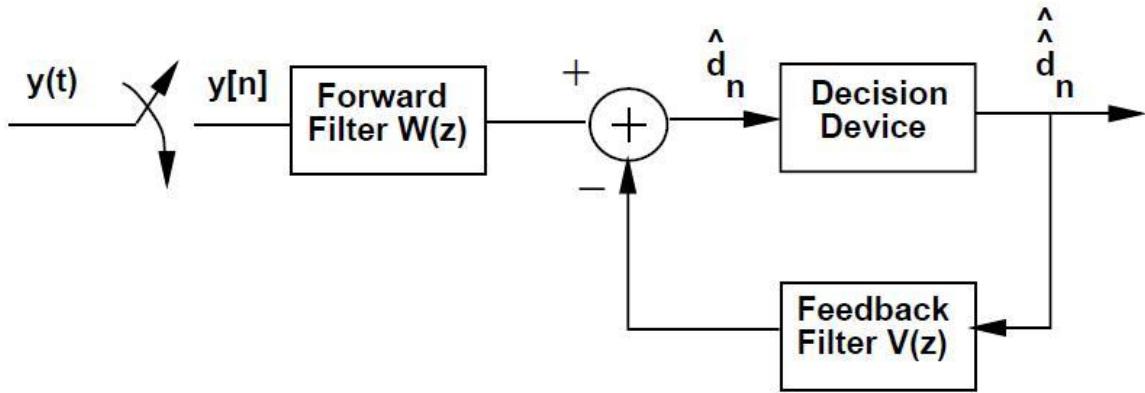
$$\hat{d}^L = \operatorname{argmax}[2R\{\sum_k d_k^* y[k]\} - \sum_k \sum_m d_k d_m^* f[k-m]] \quad (1-33)$$

از این معادله مشاهده می شود که خروجی MLSE تنها به خروجی نمونه بردار $\{y[k]\}$ و پارامترهای کانال $f[n-k] = f(nT_s - kT_s) = f(t)h^*(t)$ دارد که در آن $f(t)h^*(t)$ از آنجایی که پیاده سازی ما نشان می دهد MLSE فقط به خروجی کانال وابسته است، بنابراین فیلتر منطبق شکل ۱-۴ برای این روش بهینه خواهد بود (یعنی در صورت استفاده از MLSE، فیلتر منطبق علاوه بر اینکه در حضور AWGN کاراست، در برابر ISI نیز عملکرد خوبی دارد. با استفاده از الگوریتم ویتریبی^۱ برای پیاده سازی MLSE می توان پیچیدگی را کاهش داد، در عین حال با افزایش گسترش تأخیر پیچیدگی به صورت نمایی افزایش می یابد. در ادامه به توضیح روشی غیر خطی با پیچیدگی کمتر میپردازیم).

۱-۳-۶ متعادلسازی فیدبک تصمیم (DFE)

متعادلساز DFE تشکیل شده است از یک فیلتر پیش سو $B(z)$ که ورودی آن رشته اطلاعات دریافتی است (همانند متعادلساز خطی)، به همراه یک بلوک فیدبک $D(z)$ که ورودی آن دنباله دریافتی قبلی می باشد. ساختار DFE در شکل زیر نمایش داده شده است.

^۱ Viterbi Algorithm



شکل ۱-۶ ساختار متعادلساز DFE

با فرض اینکه $w(z)$ دارای N_1 ضریب و $V(z)$ دارای N_2 ضریب باشند، خروجی DFE را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\hat{d}_k = \sum_{i=-N_1}^0 w_i y[k-i] - \sum_{i=1}^{N_2} v_i \hat{d}_{k-i} \quad (1-34)$$

روش معمول برای انتخاب ضرائب ZF، $w(z)$ ، $v(z)$ (حذف کل ISI) و یا MMSE (متوسط مربع خطای موردنظر انتظار بین خروجی DFE و سمبول اصلی را می‌نیم می‌کند) می‌باشد. اثبات شده است که در صورتی که هر دو $w(z)$ ، $v(z)$ دارای طول نامحدود باشند، فیلتر بهینه پیش سو برای ZF به صورت $(\frac{1}{z^*} / G_m^*)$ می‌باشد. در این حالت فیلتر فیدبک $v(z)$ باید ضرورتاً مشابه کانال باشد پایه ترکیبی $F(z)$ باشد.

برای حوزه MMSE هدف ما می‌نیم کردن $E[d_k - \hat{d}_k]^2$ می‌باشد. فرض کنید $f_n = f[n]$ باشد. در این صورت این روش می‌نیم سازی بیان می‌کند که ضرائب فیلتر پیش سو می‌باشد. مجموعه معادلات خطی زیر را برآورده نماید

$$\sum_{i=-N_1}^0 q_{li} w_i = f_{-l} \quad (1-35)$$

$$q_{li} = \sum_{j=-l}^0 f_j^* f_{j+l-i} + N_0 \delta[l-i], \quad l, i = -N_1, \dots, 0 \quad (1-36)$$

پس از آن ضرائب فیلتر فیدبک برای این فیلتر پیش سو به صورت زیر خواهد بود

$$v_k = - \sum_{i=-N_1}^0 w_i f_{k-i} \quad (1-37)$$

در صورتی که هیچگونه خطای تصمیمی وجود نداشته باشد، یعنی $d_k = \hat{d}_k$ این ضرائب کاملاً ISI را بی اثر می کنند. سالز¹ نشان داده است که مقدار خطای می نیم شده حاصل را، به صورت زیر بدست می آوریم

$$J_{\min} = \exp \left[T_s \int_{-0.5/T_s}^{0.5/T_s} \ln \left[\frac{N_0}{F_{\Sigma}(f) + N_0} \right] df \right] \quad (1-38)$$

عموماً صرف نظر از اثر خطاهای فیدبک، میزان MMSE در روش DFE بسیار کمتر از روش متعادلسازی خطی است.

از آنجایی که ISI جدا شده از طریق مسیر فیدبک، ISI واقعی مربوط به d_n نمی باشد، در صورت برابر نبودن d_k و \hat{d}_k ، DFE دارای خطای فیدبک خواهد شد. این خطا نهایتاً در تصمیم گیری مربوط به انتخاب هر بیت اثر می گذارد. بعلاوه این خطای منتشر شده، توسط کدینگ کانال نیز قابل اصلاح نمی باشد، چرا که مسیر فیدبک بر روی سمبول های کد شده کانال قبل از بلوک رمزگشائی عمل می کند.

آنچه تاکنون عنوان شد، روشهای شناخته شده و تعمیم یافته در دانش متعادلسازی می باشند، علاوه بر این روشها می توان به روشهایی همچون ایجاد تغییرات در الگوریتم ویتری برای اصلاح روش MLSE، تکنیک های مبتنی بر توربو دیکدرها² و متعادلسازی توربو³، و همچنین تخمین کانال در فرستنده جهت پیش متعادلسازی⁴ که شامل روشهایی چون پیش کدینگ تاملینسون - هاراشیما⁵ می شود نیز اشاره کرد. در بخش بعد به مطالعه روشهای تطبیقی متعادلسازی پرداخته و در میان آنها روشهایی که بدون استفاده از دنباله آموزش کار می کنند را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

¹ Salz

² Turbo Decoder

³ Turbo Equalization

⁴ Pre - Equalization

⁵ Tomlinson - Harashima

بخش دوم: متعادلسازی تطبیقی

در بخش قبل، انواع متعادلسازی های خطی و غیر خطی را جهت جبران ISI درگیرنده های دیجیتالی در کانالهای دارای پهنهای باند محدود غیر ایده آل بررسی کردیم. دیدیم که برخی گیرنده ها روش MLSE را برای آشکارسازی رشته اطلاعات داده از نمونه های خروجی انتخاب می کنند و برخی دیگر یکی از دو روش متعادلسازی خطی و یا روش DFE را بر می گزینند.

در توسعه روشهای متعادلسازی، ما فرض کردیم که مشخصات کانال اعم از پاسخ ضربه و یا پاسخ فرکانسی برای گیرنده شناخته شده اند. در حالی که در بسیاری از سیستم های مخابراتی، نه تنها مشخصات کانال از ابتدا برای گیرنده شناخته شده نیست، بلکه پاسخ کانال متغیر با زمان نیز می باشد. در چنین حالتی متعادلساز طوری طراحی می شود که برای پاسخ کانال قابل تنظیم بوده و در شرایط کانال های متغیر با زمان ضرائب فیلتر به صورت تطبیقی¹ (وقfi) قابل تغییر باشند.

در این فصل، ما به ارائه الگوریتم هائی برای تنظیم ضرائب متعادلساز جهت بهینه سازی عملکرد فیلتر و جبران تغییرات مشخصات کانال به صورت تطبیقی می پردازیم.

¹ Adaptive

۱-۲ متعادلسازی خطی تطبیقی

به یاد داریم که در روش متعادلسازی خطی از دو روش متفاوت برای بدست آوردن ضرائب متعادلساز استفاده می کنیم. یکی از روشها بر اساس می نیم کردن اعوجاج فله موج^۱ در خروجی متعادلساز و دیگری بر اساس می نیم کردن میانگین مربعات خطای کار می کنند. در ادامه به ارائه دو روش برای بهینه سازی به صورت خودکار و تطبیقی می پردازیم.

۱-۱-۲ الگوریتم ZF

در حوزه اعوجاج فله موج این اعوجاج (c) D از طریق تنظیم ضرائب متعادلساز $\{c_k\}$ می نیم می شود: به طور کلی، به جز در مواردی که اعوجاج فله در ورودی متعادلساز کوچکتر از یک باشد، الگوریتم محاسبه ساده ای برای این بهینه سازی وجود ندارد. در صورتی که $D_0 < 1$ باشد، اعوجاج (c) در خروجی متعادلساز از طریق اجبار بر روی پاسخ متعادلساز $q_n = 0$ ، برای $K \leq |n| \leq 1$ و $q_0 = 1$ می نیم می شود. در این حالت الگوریتم ساده ZF برای دستیابی به این هدف وجود خواهد داشت.

راه حل ZF با اعمال همبستگی متقابل^۲ بین دنباله خطای $\hat{I}_k = I_k - \epsilon_k$ و رشته اطلاعات مطلوب $\{I_k\}$ و قرار دادن آن برابر صفر در بازه $K \leq |n| \leq 0$ بدست می آید. داریم

$$\begin{aligned} E(\epsilon_k I_{k-j}^*) &= E[(I_k - \hat{I}_k) I_{k-j}^*] \\ &= E(I_k I_{k-j}^*) - E(\hat{I}_k I_{k-j}^*) , \quad j = -K, \dots, K \end{aligned} \quad (2-1)$$

فرض می کنیم سمبول های اطلاعات ناهمبسته^۳ بوده $E(I_k I_j^*) = \delta_{kj}$ و همچنین رشته اطلاعات $\{I_k\}$ با دنباله نویز جمعی $\{\eta_k\}$ غیر وابسته باشند. پس از میانگین گیری از رابطه بالا و جایگذاری \hat{I}_k خواهیم داشت

$$E(\epsilon_k I_{k-j}^*) = \delta_{j0} - q_j , \quad j = -K, \dots, K \quad (2-2)$$

بنابراین شرط زیر به ازای $q_0 = 1$ برآورده می شود

¹ Peak Distortion

² Cross Correlation

³ Uncorrelated

$$E(\epsilon_k I_{k-j}^*) = 0 \quad (2-3)$$

زمانی که پاسخ کانال ناشناخته باشد، تابع همبستگی متقابل ارائه شده توسط معادله ۲-۱ نیز ناشناخته خواهد بود. توسط ارسال یک دنباله آموزش^۱ $\{I_k\}$ به گیرنده می‌توان بر این مشکل غلبه کرد؛ یعنی با تخمین همبستگی متقابل توسط جابجایی میانگین‌های زمانی با میانگین‌های گروهی^۲ در معادله ۲-۱. پس از آموزش اولیه در آن به ارسال دنباله آموزشی با طول از پیش تعیین شده برابر یا بیشتر از طول متعادلساز می‌پردازیم و آن ضرایبی که در معادله ۲-۳ صدق کنند بدست می‌آیند. یکی از الگوریتم‌های بازگشتی موجود برای تنظیم ضرایب متعادلساز به صورت زیر است

$$c_j^{(k+1)} = c_j^k + \Delta \epsilon_k I_{k-j}^* \quad (2-4)$$

که در آن $c_j^{(k)}$ مقدار ضریب زام در لحظه $t=kT$ و $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ سیگنال خطای زمان $t=kT$ و Δ ضریب مقیاس^۳ بوده که نرخ تنظیمات را کنترل می‌کند. فرمت $\epsilon_k I_{k-j}^*$ تخمینی از همبستگی متقابل (میانگین گروهی) $(\epsilon_k I_{k-j}^*) E$ می‌باشد. عملیات میانگین گیری در همبستگی متقابل توسط معادله دیفرانسیل اول در معادله ۲-۴ که معرف یک انتگرال گیر ساده گستته در زمان است بدست می‌آید.

پس از اینکه ضرایب متعادلساز به نقطه مناسب خود همگرا^۴ شدند، با ادامه دوره آموزش، تصمیماتی که در خروجی آشکارساز گرفته می‌شوند، تا حد قابل قبولی مورد اعتماد هستند تا توسط آن فرایند تطبیق دادن ضرایب را دنبال کنیم. به این روش، تصمیم مستقیم (هدایت شده توسط تصمیمات) گفته می‌شود. در چنین حالتی همبستگی متقابل در معادله ۲-۴، با سینگنال خطای \tilde{I}_k و رشته اطلاعات خروجی $k, -k, \dots, j, -j$ در گیر می‌شود. بنابراین در حالت تطبیقی معادله ۲-۴ به صورت زیر در می‌آید

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \tilde{\epsilon}_k \tilde{I}_{k-j}^* \quad (2-5)$$

شکل ۲-۱ متعادلساز ZF را در حالات آموزشی و تطبیقی نشان میدهد.

¹ Training Sequence

² Ensemble Average

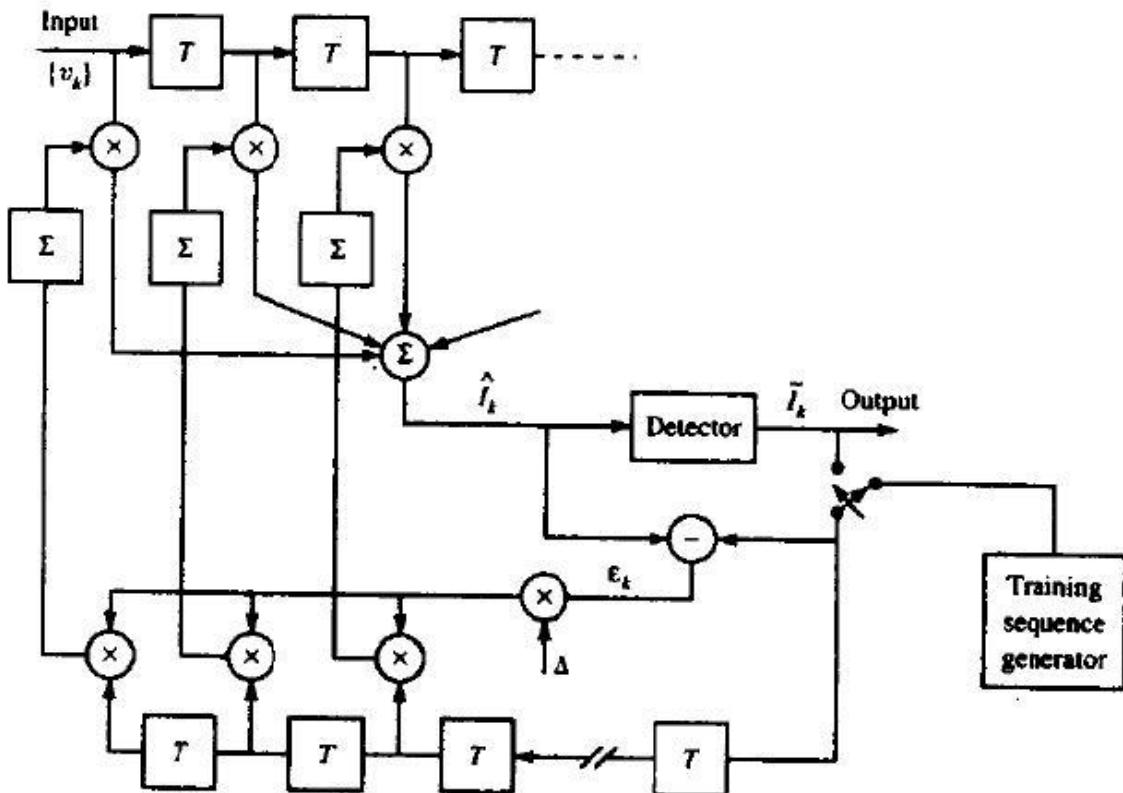
³ Scale Factor

⁴ Converged

۲-۱-۲ الگوریتم LMS

در فرایند می نیم کردن میانگین مربع خطأ، یافته‌یم که ضرائب بهینه متعادلساز از طریق حل مجموعه‌ای از معادلات خطی بدست می‌آیند. این معادلات در فرم ماتریسی به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\Gamma C = \xi \quad (2-6)$$



شکل ۱-۲ متعادلساز ZF تطبیقی

که در آن Γ ماتریس کوواریانس $(2K+1)(2K+1)$ نمونه‌های سیگنال $\{v_k\}$ ، C بردار ستونی از ضرائب متعادلساز $(2K+1)$ ، و ξ یک بردار $(2K+1)$ بعدی از ضرائب فیلتر می‌باشد. یافتن بردار ضرائب بهینه متعادلساز می‌تواند از طریق معکوس کردن ماتریس کوواریانس حاصل آید که می‌تواند توسط روش لونیسون-در بین^۱ به بهترین شکل صورت پذیرد [7].

^۱ Levinson-Durbin

روش دیگری را که می توان برای محاسبه C_{opt} بدون معکوس نمودن مستقیم ماتریس استفاده نمود یک روش تکراری است. احتمالاً ساده ترین روش تکراری روش سریع ترین فرود¹ است که با انتخاب یک مقدار دلخواه برای C مثلاً C_0 آغاز می شود. این انتخاب اولیه ضرایب، متناظر نقطه ای روی سطح توان MSE در فضای $(2K+1)$ بعدی ضرایب است. بردار گرادیان G_0 که دارای $(2K+1)$ مولفه گرادیان $k = -K, -1, 0, 1, \dots, K$ است، در این نقطه محاسبه شده و وزن هر کدام از شیرها² در جهت مخالف مولفه گرادیان مربوطه تغییر می کند. تغییر در وزن شیر زام مناسب است با اندازه مولفه گرادیان زام. بنابراین مقادیر بعدی بردار ضرایب C از رابطه زیر بدست می آیند.

$$C_{k+1} = C_k - \Delta G_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2-7)$$

که در آن بردار گرادیان G_k برابر است با

$$G_k = 1/2(dj/dC_k) = \Gamma C_k - \xi = -E(\epsilon_k v_k^*) \quad (2-8)$$

بردار C_k بیانگر مجموعه ضرایب در k امین تکرار، $I_k - \hat{I}_k = \epsilon_k$ سیگنال خطای v_k در k امین تکرار، $v_k = [v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+K-1}]^T$ است که تخمین \hat{I}_k را شکل می دهد و Δ عدد مثبتی است که به اندازه کافی کوچک انتخاب می شود تا همگرایی فرایند را تضمین نماید. اگر برای مقداری از $k = k_0$ به حداقل MSE دست یافته باشد، در این صورت $G_k = 0$ شده و هیچ گونه تغییر دیگری در وزن شیرها داده نمی شود. در حالت کلی و برای k_0 محدود نمی توان با استفاده از روش سریع ترین فرود به $J_{\min}(k)$ دست یافت، اما می توان تا حد دلخواه به آن نزدیک شد.

مشکل اصلی روش سریع ترین فرود برای تعیین وزن بهینه شیرها، عدم اطلاع از بردار گرادیان G_k است که به ماتریس کوواریانس Γ و بردار همبستگی متقابل³ هر دو بستگی دارد. این کمیت ها به نوبه خود به ضرایب مدل کانال معادل گستته زمان $\{f_k\}$ و کوواریانس دنباله اطلاعات و نویز تجمعی بستگی دارند که در حالت کلی همه آنها برای گیرنده ناشناخته اند. برای غلبه بر این مشکل می توان از تخمین بردار گرادیان استفاده نمود. یعنی اینکه الگوریتم تنظیم ضرایب وزنی شیرها را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\hat{C}_{k+1} = \hat{C}_k - \Delta \hat{G}_k \quad (2-9)$$

که در آن \hat{G}_k بیانگر تخمین بردار گرادیان G_k و \hat{C}_k بیانگر تخمین بردار ضرایب است.

¹ Steepest Descent

² Taps

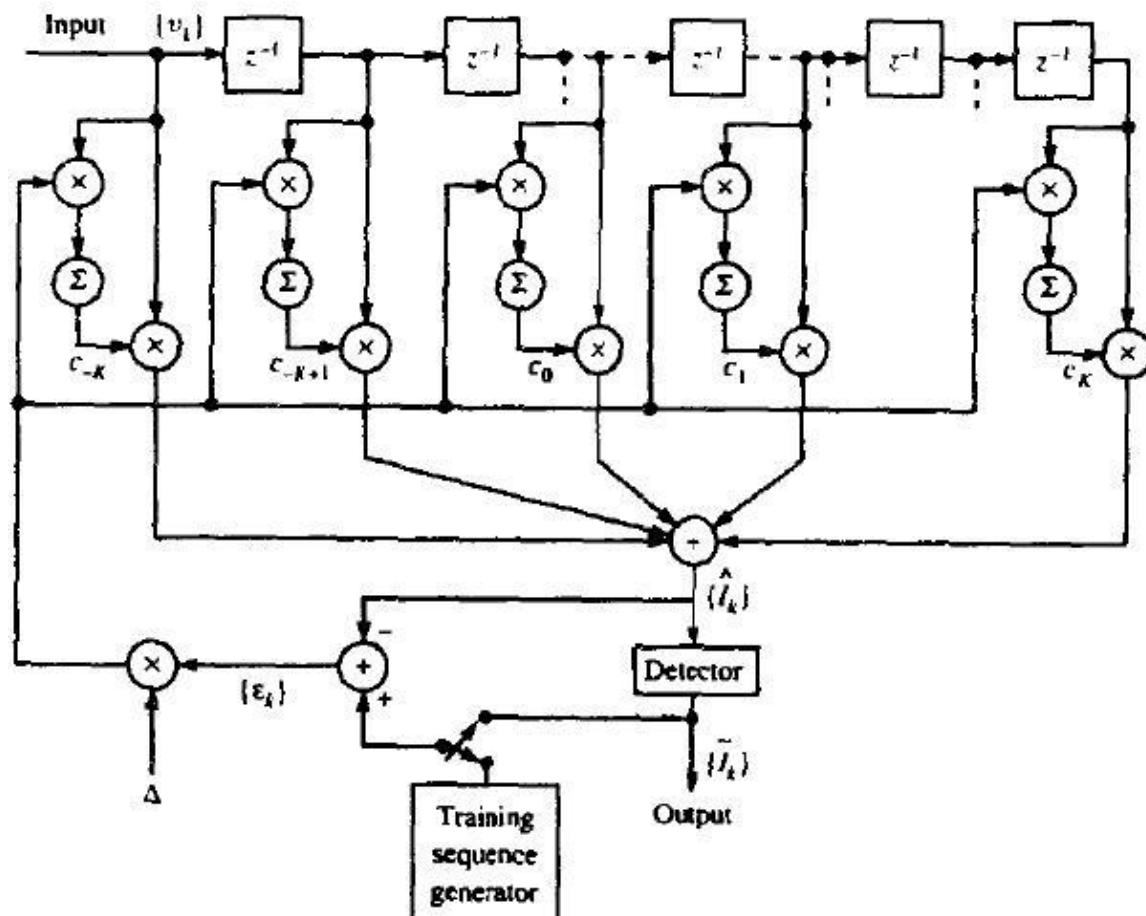
از رابطه (۲-۸) توجه دارید که G_k برابر است با منفی امید ریاضی v_k^* در نتیجه تخمین G_k برابر است با

$$\hat{G}_k = -\epsilon_k v_k^* \quad (2-10)$$

از آنجائی که $E(\hat{G}_k) = G_k$ یک تخمین بایاس نشده از بردار گرادیان واقعی G_k است، استفاده از رابطه (۲-۹) در رابطه (۲-۱۰) الگوریتم زیر را به دست می دهد.

$$\hat{c}_{k+1} = \hat{c}_k + \Delta \epsilon_k v_k^* \quad (2-11)$$

این الگوریتم همان گونه که توسط ویدور (۱۹۶۶) تشریح شده الگوریتم پایه حداقل متوسط مجازور (LMS) برای تنظیم بازگشتی ضرایب وزنی شیرهای همسان ساز است و در همسان ساز شکل ۲-۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲-۲ متعادلساز وفقی خطی مبتنی بر معیار MSE

الگوریتم پایه داده شده در رابطه (۲-۱۱) و انواع تغییر یافته ای از آن در همسان سازهای وفقی تجاری مورد استفاده در مودم های سرعت بالا به کار گرفته شده است. سه نوع تغییر یافته الگوریتم

پایه را می توان با استفاده از اطلاعات موجود در علامت سیگنال خطای v_k و/یا در مولفه های v_k به دست آورد. این سه نوع الگوریتم تغییر یافته عبارتند از

$$C_{(k+1)j} = C_{kj} + \Delta c \operatorname{sgn}(\epsilon_k) v_{k-j}^*, \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2-12)$$

$$C_{(k+1)j} = C_{kj} + \Delta \epsilon_k \operatorname{sgn}(v_{k-j}^*) \quad , \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2-13)$$

$$C_{(k+1)j} = C_{kj} + \Delta c \operatorname{sgn}(\epsilon_k) \operatorname{sgn}(v_{k-j}^*) \quad , \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2-14)$$

که در آنها $\operatorname{sgn}(x)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1+j & [Re(x) > 0, Im(x) > 0] \\ 1-j & [Re(x) > 0, Im(x) < 0] \\ -1+j & [Re(x) < 0, Im(x) > 0] \\ -1-j & [Re(x) < 0, Im(x) < 0] \end{cases} \quad (2-15)$$

واضح است که الگوریتم داده شده در رابطه (۲-۱۴) از نظر پیاده سازی ساده ترین است، ولی در مقایسه با سایر انواع کنترین نرخ همگرایی را دارد.

انواع مختلف دیگری از الگوریتم LMS با متوسط گیری و یا فیلتر کردن بردارهای گرادیان روی چندین تکرار و قبل از اقدام به تنظیم ضرایب همسان ساز به دست می آید. به عنوان مثال متوسط روی N بردار گرادیان عبارت است از

$$\bar{G}_{mN} = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_{mN+n} v_{mN+n}^* \quad (2-16)$$

و رابطه بازگشتی برای به هنگام نمودن ضرایب همسان ساز بعد از هر N تکرار عبارت است از

$$\hat{C}_{(k+1)N} = \hat{C}_{kN} - \Delta \bar{G}_{kN} \quad (2-17)$$

در واقع همان گونه که توسط گاردنر (۱۹۸۴) نشان داده شده، عملیات متوسط گیری انجام شده در رابطه (۲-۱۶) میزان نویز را در تخمین بردار گرادیان کاهش می دهد.

شیوه دیگر عبارت است از فیلتر نمودن بردارهای گرادیان نویزی توسط یک فیلتر پایین گذر و استفاده از خروجی آن به عنوان تخمین بردار گرادیان. به عنوان مثال استفاده از یک فیلتر پایین گذر ساده برای گرادیان های نویزی، خروجی زیر را به دست می دهد

$$w \bar{G}_{k-1} + (1-w) \hat{G}_k, \quad \bar{G}(0) = \hat{G}(0) \quad (2-18)$$

که در آن انتخاب $0 \leq w \leq 1$ تعیین کننده پهنهای باند فیلتر پایین گذر است. وقتی w نزدیک یک است پهنهای باند فیلتر کوچک و میانگین گیری مؤثر روی تعداد زیادی بردارهای گرادیان انجام می شود. از طرف دیگر وقتی w کوچک است فیلتر پایین گذر دارای پهنهای باند بزرگی بوده و در نتیجه میانگین گیری اندکی روی بردارهای گرادیان انجام می شود. در صورتی که به جای G_k از بردارهای گرادیان

فیلتر شده در رابطه (۲-۱۷) استفاده شود، الگوریتم LMS گرadiان فیلتر شده بر طبق رابطه زیر به دست می آید.

$$\hat{C}_{(k+1)} = \hat{C}_k - \Delta \bar{G}_k \quad (2-19)$$

در بحث قبلی فرض شد که گیرنده برای تشکیل سیگنال خطای بین سمبول مطلوب و تخمین آن از دنباله سمبول های ارسالی مطلع است. این آگاهی را می توان در طول یک دوره τ کوتاه آموزشی و با ارسال یک دنباله τ اطلاعات شناخته شده برای تنظیم اولیه وزن شیرها برای گیرنده فراهم نمود. طول این دنباله بایستی حداقل به اندازه τ طول همسان ساز باشد، به طوری که طیف سیگنال ارسالی پنهانی باند کانال مورد نظر را به طور مناسب پوشش دهد.

در عمل اغلب دنباله آموزشی یک دنباله شبیه تصادفی تناوبی نظیر دنباله یک ثبات انتقالی^۱ با حداقل طول بوده و به گونه ای انتخاب می شود که دوره تناوب آن N برابر طول همسان ساز باشد ($N=2k+1$). در این مورد معمولاً گرadiان روی طول دنباله میانگین گیری شده و تنظیم ضرایب در هر یک پریود یک بار انجام می شود. این شیوه را همسان سازی دوری^۲ گویند و در مقالات مولر و سپولدینگ (۱۹۷۵) و قرشی (۱۹۷۷ و ۱۹۸۵) بررسی شده است. یک روش عملی برای تنظیم پیوسته وزن شیرها می تواند استفاده از مدل مکرر مبتنی بر تصمیم باشد که فرض می شود تصمیمات اتخاذ شده در مورد سمبول های اطلاعات صحیح بوده و برای تشکیل سیگنال خطای ϵ_k به جای I_k از آنها استفاده شود. روش دیگر استفاده از یک دنباله کاوشگر^۳ شبیه تصادفی شناخته شده است که به سیگنال ناقل اطلاعات اضافه شده و یا با آن در هم نهی زمانی شده و در طرف گیرنده از مقایسه سمبول های کاوشگر دریافتی با سمبول های کاوشگر ارسالی برای تنظیم ضرایب شیرها استفاده می شود. در مدل مکرر مبتنی بر تصمیم سیگنال خطای به صورت $\hat{I}_k - I_k = \epsilon_k$ در می آید که در آن \hat{I}_k تصمیم گیرنده بر مبنای تخمین \hat{I}_k است. تازمانی که گیرنده با نرخ خطای پابین کار می کند تاثیر خطاهای گاه و بیگاه بر همگایی الگوریتم قابل صرفنظر کردن است.

اگر پاسخ کانال تغییر کند این امر موجب تغییر ضرایب مدل کانال معادل گستره زمان $\{f_k\}$ می شود. از آنجائی که سیگنال خطای به $\{f_k\}$ بستگی دارد، در این سیگنال نیز منعکس خواهد شد. لذا وزن شیرها بر طبق رابطه (۲-۱۱) تغییر کرده تا منعکس کننده تغییر در کانال باشد. اگر آمارگان نویز یا دنباله اطلاعات تغییر کند، تغییر مشابهی در وزن شیرها ایجاد می شود. بنابراین همسان ساز و فقی است.

¹ Shift Register

² Cyclic Equalization

³ Probe Sequence

۲-۲ همسان ساز پس خور تصمیم وفقی

برای تنظیم ضرایب فیلترهای پیش خور و پسخور یک همسان ساز با پس خور تصمیم (DFE) می توان به جای معکوس نمودن ماتریس این کار را همانند مورد همسان ساز خطی وفقی به صورت بازگشتی انجام داد. بر مبنای حداقل ساختن MSE در خروجی DFE، الگوریتم سریع ترین فرود به صورت زیر در می آید

$$C_{k+1} = C_k + \Delta E(\epsilon_k v_k^*) \quad (2-20)$$

که در آن C_k برابر ضرایب همسان ساز در بازه زمانی سیگنال k ام، $E(\epsilon_k v_k^*)$ همبستگی متقابل سیگنال خطای $v_k = [v_{k+K1}, \dots, v_{k-K2}]^T$ بیانگر مقادیر سیگنال در فیلترهای پیش خور و پس خور در زمان $t=KT$ می باشد. متوسط مجازور خطای در صورتی حداقل خواهد شد که وقتی $\rightarrow \infty$ ، بردار همبستگی متقابل $E(\epsilon_k v_k^*) = 0$ باشد.

از آنجائی که مقدار دقیق بردار همبستگی متقابل در هیچ لحظه زمانی شناخته شده نیست از تخمین بردار $\epsilon_k v_k^*$ استفاده نموده و نویز موجود در تخمین را توسط رابطه بازگشتی زیر میانگین گیری می کنیم.

$$\hat{C}_{(k+1)} = \hat{C}_k - \Delta \epsilon_k v_k^* \quad (2-21)$$

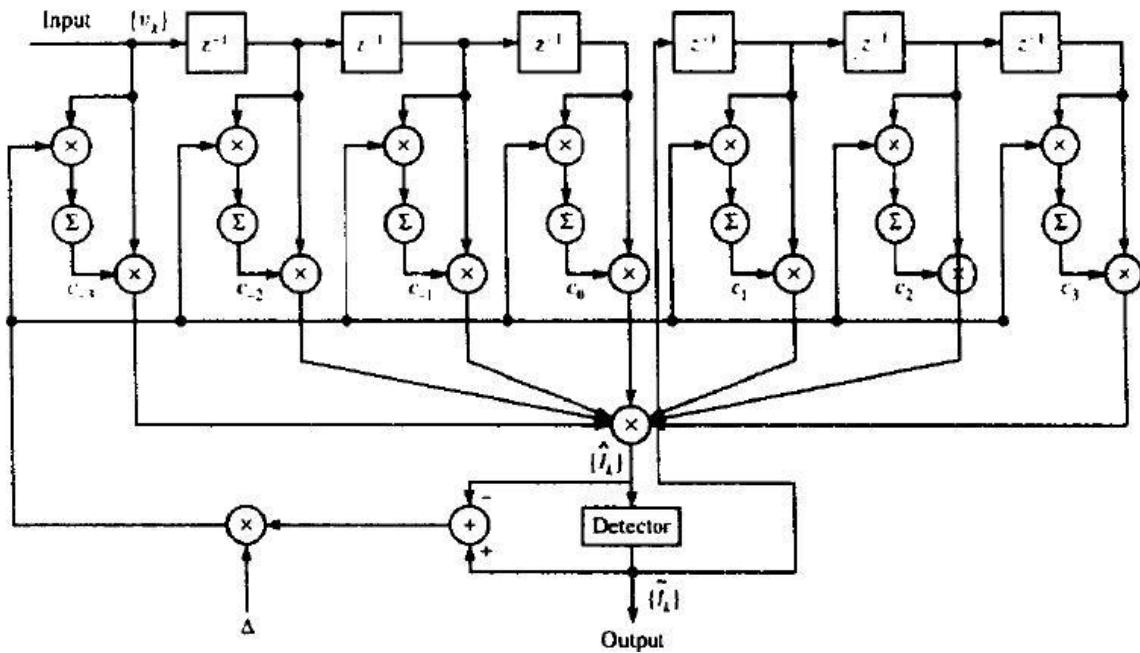
این الگوریتم LMS برای همسان ساز پس خور تصمیم است.

همانند مورد همسان ساز خطی، برای تنظیم اولیه ضرایب DFE می توان از یک دنباله آموزشی استفاده کرد. با همگرا شدن (نزدیک شدن) به ضرایب بهینه (حداقل SEM) همسان ساز به مُد مبتنی بر تصمیم تغییر وضعیت داده و از تصمیمات خروجی آشکار ساز برای تشکیل سیگنال خطای ϵ_k و اعمال آن به فیلتر پس خور استفاده می کند. این همان مُد وفقی کار همسان ساز با پس خور تصمیم است که در شکل ۲-۳ نشان داده شده است. در این حالت رابطه بازگشتی برای تنظیم ضرایب همسان ساز عبارت است از

$$\hat{C}_{(k+1)} = \hat{C}_k - \Delta \tilde{\epsilon}_k v_k^* \quad (2-22)$$

که در آن $\hat{I}_k = \tilde{I}_k - v_k \tilde{v}_k^*$ و $\tilde{\epsilon}_k = \tilde{I}_k - \tilde{v}_k \tilde{v}_k^*$

مشخصات عملکردی الگوریتم LMS برای تنظیم DFE اساساً همانند چیزی است که برای همسان ساز خطی وفقی ارائه شد.



شکل ۲-۳ همسان ساز پس خور تصمیم

۲-۳ الگوریتم های کمترین مربعات بازگشتی (RLS) برای همسان سازی وفقی

الگوریتم LMS برای تنظیم وفقی ضرایب همسان ساز خطی و یا DFE که در بخش های ۱-۲ و ۲-۲ تشریح شد، اساساً یک الگوریتم سریع ترین فرود(آماری) است که در آن بردار گرادیان واقعی با تخمینی که مستقیماً از روی داده ها به دست می آید تقریب زده می شود.

عمده ترین مزیت الگوریتم سریع ترین فرود سادگی محاسباتی آن است. بهای پرداختی بابت این سادگی همگرائی کند آن است. خصوصاً هنگامی که مقادیر ویژه ماتریس خود همبستگی Γ کanal دارای پراکندگی زیاد باشد، یعنی $1 < \lambda_{\min} / \lambda_{\max}$. از دیدگاه دیگر، الگوریتم گرادیان برای کنترل نرخ همگرایی فقط یک پارامتر قابل تنظیم یعنی Δ را دارد. در نتیجه همگرایی کند آن ناشی از این محدودیت اساسی است.

برای دستیابی به همگرایی سریع تر لازم است الگوریتم های پیچیده تری با پارامترهای بیشتر ابداع شود. مشخصاً اگر ماتریس Γ از نوع $N \times N$ و دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ باشد می توان از الگوریتمی شامل N پارامتر، هر یک برای هر کدام از مقادیر ویژه، استفاده نمود. چگونگی انتخاب بهینه این پارامترها برای حصول به همگرایی سریع موضوع بحث این بخش است.

برای به دست آوردن الگوریتم هایی با سرعت همگرایی بیشتر بايستی از شیوه کمترین مربعات استفاده نمود لذا برای حداقل نمودن توان دوم شاخص عملکرد بايستی مستقیماً با داده دریافتی سرو کار داشت.

در حالی که پیش از این متوسط مجذور خطأ را حداقل کردیم. به بیان ساده این بدان معنی است که شاخص عملکرد به جای متوسط آماری بر حسب متوسط زمانی بیان شده است.

نمایش الگوریتم های کمترین مربعات بازگشتی به صورت ماتریسی مناسب است. لذا بایستی تعدادی بردار و ماتریس مورد نیاز برای این منظور را تعریف کنیم. برای این منظور علامت گذاری را اندکی تغییر می دهیم. به طور مشخص تخمین سمبل اطلاعات توسط یک همسان ساز خطی را در زمان t که یک عدد صحیح است، به صورت زیر نمایش می دهیم

$$\hat{I}(t) = \sum_{j=-K}^K c_j(t-1)v_{t-j} \quad (2-23)$$

با تعویض محدوده تغییرات شاخص j در $c_j(t-1)$ از $j=0$ تا $N-1$ و همزمان تعریف

$$y(t) = v_t + k \quad (2-24)$$

تخمین $\hat{I}(t)$ به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} \hat{I}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j(t-1)y(t-j) \quad (2-25) \\ &= C_N^t(t-1)Y_N(t) \end{aligned}$$

که در آن $C_N^t(t-1)$ و $Y_N(t)$ به ترتیب بردارهای ستون ضرایب همسان ساز $c_j(t-1)$ و سیگنال های ورودی $y(t-j)$ هستند. $j=0, 1, \dots, N-1$

به طریق مشابه در همسان ساز پسخور تصمیم ضرائب شیرها $c_j(t-1)$ را داریم که $1+k_1$ ضریب اول مربوط به فیلتر پیش خور و $N-k_1-1 = K_2$ ضریب دیگر مربوط به فیلتر پس خور هستند. داده در تخمین $\hat{I}(t)$ عبارت است از $\tilde{I}_{t-K_2}, \dots, \tilde{I}_{t-1}, v_{t+1}, \dots, v_{t+K_1}$ که در آن $j \leq K_2$ بیانگر تصمیمات اتخاذ شده قبلی است. در این بحث از اثر خطاهای تصمیم گیری بر الگوریتم صفر اجباری صرف نظر می کنیم. لذا فرض می کنیم که $I_{t-j} = \tilde{I}_{t-j}$. برای تسهیل در علامت گذاری تعریف زیر را نیز اضافه می کنیم:

$$y(t-j) = \begin{cases} v_{t+K_1-j} & (0 \leq j \leq K_1) \\ I_{t+K_1-j} & (K_1 < j \leq N-1) \end{cases} \quad (2-26)$$

بنابراین

$$Y_N(t) = [y(t) \ y(t-1) \ \dots \ y(t-N+1)]^T \quad (2-27)$$

$$= [v_{t+K_1} \ \dots \ v_{t+1} \ v_t \ I_{t-1} \ \dots \ I_{t-K_2}]^T$$

۱-۳-۲ الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی (کالمن^۱)

تخمین کمترین مربعات بازگشتی^۲ (RLS) از $\hat{I}(t)$ را می‌توان به شرح زیر فرمول بندی کرد. فرض کنید که بردار $(t), Y_N(t), \dots, Y_N(n), \dots, Y_N(0)$ را مشاهده کرده و می‌خواهیم بردار ضرایب همسان‌ساز (خطی یا پس خور تصمیم) $C_N(t)$ را که متوسط زمانی مجازور خطای وزن داده شده به شرح زیر را حداقل می‌کند، تعیین نماییم

$$\varepsilon_N^{LS} = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |e_N(n, t)|^2 \quad (2-28)$$

در رابطه فوق خطای اینگونه تعریف می‌شود

$$e_N(n, t) = I_n - C_N^t(t) Y_N(n) \quad (2-29)$$

و w بیانگر یک ضریب وزنی است $w < 1$. وزن اعمال شده به داده زمان گستته نمایی انتخاب شده و برای یک کانال دارای مشخصات متغیر با زمان مناسب است. حداقل ساختن ε_N^{LS} نسبت به بردار ضرایب $C_N(t)$ مجموعه خطی زیر را به دست می‌دهد.

$$R_N(t) C_N = D_N(t) \quad (2-30)$$

که در آن $R_N(t)$ ماتریس همبستگی سیگنال، تعریف شده به صورت زیر است

$$R_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} Y_N^*(n) Y_N^t(n) \quad (2-31)$$

و $D_N(t)$ بردار همبستگی متقابل است

$$D_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} Y_N^*(n) I(n) \quad (2-32)$$

حل معادله (۲-۳۰) عبارت است از

$$C_N(t) = R_N^{-1}(t) D(t) \quad (2-33)$$

ماتریس $R_N(t)$ همانند ماتریس خودهمبستگی آماری Γ است در حالی که بردار $D_N(t)$ همانند بردار همبستگی متقابل تعریف شده در قبل است. همچنین بایستی تأکید نماییم که برای مقادیر کوچک t ، ممکن است $R_N(t)$ دارای شرایط بیمار گونه باشد؛ لذا معمول است که در ابتدا ماتریس δI_N را که در

¹ Kalman

² Recursive Least Square

آن δ یک ثابت مثبت کوچک و I_N یک ماتریس یکه است به $R_N(t)$ اضافه می کنند. با وزن دهی نمایی گذشته اثر افزودن δI_N با زمان از بین می رود.

حال فرض کنید که حل (۲-۳۳) برای زمان $t-1$ $C_N(t-1)$ را داشته و می خواهیم $C_N(t)$ را محاسبه کنیم. حل مجموعه N معادله خطی برای هر مؤلفه جدید سیگنال دریافتی کاری غیرموثر و لذا غیرعملی است. برای اجتناب از این کار به شرح زیر عمل می کنیم. ابتدا می توان $R_N(t)$ را به صورت بازگشتنی به شرح زیر محاسبه نمود.

$$R_N(t) = wR_N(t-1) + Y_N^*(t)Y_N^{t_n}(t) \quad (2-34)$$

رابطه (۲-۳۴) را معادله به هنگام سازی زمانی^۱ $R_N(t)$ می نامیم.

چون در رابطه (۲-۳۳) به معکوس $R_N(t)$ نیاز داریم از تساوی زیر برای معکوس ماتریس استفاده می کنیم.

$$R_N^{-1}(t) = \frac{1}{w} [R_N^{-1}(t-1) - \frac{R_N^{-1}(t-1)Y_N^*(t)Y_N^{t_n}(t)R_N^{-1}(t-1)}{w + Y_N(t)R_N^{-1}(t-1)Y_N^*(t)}] \quad (2-35)$$

بنابراین $R_N^{-1}(t)$ را می توان به صورت بازگشتنی بر طبق رابطه (۲-۳۵) محاسبه نمود.

برای سهولت تعریف می کنیم $P_N(t) = R_N^{-1}(t)$. تعریف یک بردار N بعدی به نام بردار بهره کالمون^۲ به صورت زیر نیز مناسب است.

$$K_N(t) = \frac{1}{w + \mu_N(t)} P_N(t-1) Y_N^*(t) \quad (2-36)$$

که $\mu_N(t)$ یک اسکالر تعریف شده به صورت زیر است

$$\mu_N(t) = Y_N^t(t) P_N(t-1) Y_N^*(t) \quad (2-37)$$

با این تعاریف معادله (۲-۳۵) به این صورت در می آید

$$P_N(t) = \frac{1}{w} [P_N(t-1) - K_N(t) Y_N^t(t) P_N(t-1)] \quad (2-38)$$

¹ Time Update Equation

² Kalman Gain Vector

فرض کنید که طرفین رابطه (2-۳۸) را در $Y_N^*(t)$ پس ضرب^۱ کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}
 P_N(t)Y_N^*(t) &= 1/w [P_N(t-1)Y_N^*(t) - K_N(t)Y_N^t(t)P_N(t-1)Y_N^*(t)] \\
 &= 1/w \{ [w + \mu_N(t)]K_N(t) - K_N(t)\mu_N(t) \} \\
 &= K_N(t)
 \end{aligned} \tag{2-39}$$

بنابراین بردار بهره کالمن را می‌توان به صورت $P_N(t) Y_N(t)$ نیز تعریف کرد.

حال برای به دست آوردن رابطه ای جهت تعیین $C_N(t)$ از روی $C_N(t-1)$ از تساوی معکوس ماتریس استفاده می‌کنیم. از آنجا که

$$C_N(t) = P_N(t)D_N(t)$$

و

$$D_N(t) = wD_N(t-1) + I(t)Y_N^*(t) \tag{2-40}$$

داریم

$$\begin{aligned}
 C_N(t) &= 1/w [P_N(t-1) - K_N(t)Y_N^t(t)P_N(t-1)][wD_N(t-1) + I(t)Y_N^*(t)] \\
 &= P_N(t-1) - D_N(t-1) + 1/w I(t) P_N(t-1) Y_N^*(t) \\
 &\quad - K_N(t) Y_N^t(t) P_N(t-1) D_N(t-1) \\
 &\quad - 1/w I(t) K_N(t) Y_N^t(t) P_N(t-1) Y_N^*(t) \\
 &= C_N(t-1) + K_N(t)[I(t) - Y_N^t(t)C_N(t-1)]
 \end{aligned} \tag{2-41}$$

توجه کنید که $Y_N^t(t)C_N(t-1)$ برابر است با خروجی همسان ساز در زمان t یعنی

$$\hat{I}(t) = Y_N^t(t)C_N(t-1) \tag{2-42}$$

$$e_N(t, t-1) = I(t) - \hat{I}(t) \tag{2-43}$$

^۱ Post Multiply

برابر است با خطای بین سمبول مورد نظر و تخمین آن. لذا $C_N(t)$ به صورت بازگشتی و بر طبق رابطه زیر به هنگام می شود

$$C_N(t) = C_N(t-1) + K_N(t)e_N(t) \quad (2-44)$$

متوسط مجدور خطای باقی مانده حاصل از این بهینه سازی برابر است با

$$\varepsilon_{N_{\min}}^{LS} = \sum_{m=0}^t w^{t-n} |I(n)|^2 - C_N^t(t) D_N^*(t) \quad (2-45)$$

به طور خلاصه فرض کنید که $C_N(t-1)$ و $P_N(t-1)$ را داریم. وقتی یک مؤلفه جدید سیگنال دریافت شود، $Y_N(t)$ را داریم. در این صورت محاسبه معادله بازگشتی برای به هنگام سازی زمانی $P_N(t)$ و $C_N(t)$ به شرح زیر ادامه می یابد

$$\hat{I}(t) = Y_N^t(t) C_N(t-1)$$

$$e_N(t, t-1) = I(t) - \hat{I}(t)$$

$$K_N(t) = \frac{YtN(t)PN(t-1)}{w + YtN(t)PN(t-1)Y^*N(t)}$$

$$P_N(t) = 1/w [P_N(t-1) - K_N(t) Y_N^t(t) P_N(t-1)]$$

$$C_N(t) = C_N(t-1) + K_N(t)e_N(t) \quad (2-47)$$

الگوریتم تشریح شده توسط رابطه فوق را صورت مستقیم RLS یا الگوریتم کالمن گویند.

۴-۲ همسان سازی خودبازیاب^۱ (کور)^۲

در همسان سازهای معمولی صفر اجباری و یا حداقل متوسط مجدور خطای فرض کردیم که برای تنظیم اولیه ضرایب همسان ساز یک دنباله آموزشی شناخته شده توسط فرستنده برای گیرنده ارسال می گردد. اما در بعضی کاربردها مانند شبکه های مخابراتی چند نقطه ای مطلوب آن است که گیرنده بدون وجود یک دنباله آموزشی خود را با سیگنال دریافتی همزمان نموده و ضرایب همسان ساز را تنظیم نماید. روشهای همسان سازی مبتنی بر تنظیم اولیه ضرایب بدون استفاده از دنباله ای آموزشی را خودبازیاب یا کور می نامند.

¹ Self Recovering

² Blind

با شروع از مقاله ساتو^۱ (۱۹۷۵) در دو دهه گذشته سه گروه مختلف از الگوریتم‌های همسان‌سازی کور توسعه یافته اند. یک گروه از الگوریتم‌ها برای تنظیم همسان‌ساز از روش سریعترین فرود استفاده می‌کنند. گروه دوم برای تخمین مشخصات کانال و طراحی همسان‌ساز از آمارگان مرتبه دوم و مراتب بالاتر (معمولًاً مرتبه چهارم) سیگنال دریافتی استفاده می‌کنند. اخیراً گروه سومی از الگوریتم‌های همسان‌سازی کور مبتنی بر معیار حداکثر تشابه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این بخش این شیوه‌ها را به طور خلاصه شرح می‌دهیم.

۱-۴-۲ همسان‌سازی کور مبتنی بر معیار حداکثر تشابه

مناسب است که از مدل معادل کانال زمان گستته استفاده کنیم. یادآوری می‌نماید که خروجی این مدل کانال دارای تداخل بین سمبولی عبارت است از

$$v_n = \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} + \eta_n \quad (2-47)$$

که در آن $\{f_k\}$ ضرایب کانال معادل زمان گستته، $\{I_k\}$ بیانگر دنباله اطلاعات و $\{\eta_n\}$ دنباله نویز گوسی سفید است.

برای بلوک داده دریافتی N نقطه‌ای، تابع چگالی احتمال (مشترک) بردار داده دریافتی $v_1 = v$
 $I = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_N]^T$ به شرط اطلاع از بردار پاسخ ضربه $f = |f_0 \ f_1 \ \dots \ f_L|^T$ و بردار داده $v_2 \ \dots \ v_N$ عبارت است از $I_N]^T$

$$p(v|f, I) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N |v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k}|^2 \right) \quad (2-48)$$

تخمین‌های مشترک حداکثر تشابه f, I مقادیری از این بردارها هستند که تابع چگالی احتمال مشترک $p(v|f, I)$ را حداکثر و یا جمله موجود در نمای آن را حداقل نمایند. لذا حل ML از حداقل نمودن عبارت زیر روی I, f به دست می‌آید

$$DM(I, f) = \sum_{n=1}^N |v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k}|^2 = \|v - Af\|^2 \quad (2-49)$$

که در آن ماتریس A را ماتریس داده گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود

¹ Sato

$$A = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_2 & I_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_N & I_{N-1} & I_{N-2} & \dots & I_{N-L} \end{vmatrix} \quad (2-50)$$

نکات زیر قابل ملاحظه است. قبل از هر چیز توجه داریم که وقتی بردار داده I (یا ماتریس داده A) شناخته شده است، نظیر حالتی که یک دنباله آموزشی درگیرنده موجود است، تخمین ML پاسخ ضربه کanal که از حداقل ساختن رابطه $(2-49)$ روی f به دست می آید برابر است با

$$f_{ML}(I) = (A^H A)^{-1} A^H v \quad (2-51)$$

از طرف دیگر وقتی پاسخ ضربه کanal f شناخته شده است، آشکار ساز حداقل تشابه بهینه برای تعیین دنباله داده I با استفاده از الگوریتم ویتری بی ترلیس (و یا درخت) کanal داری ISI را جستجو می کند.

وقتی نه f و نه I هیچ کدام شناخته شده نیستند حداقل سازی معیار عملکرد DM را می توان مشترکاً روی f, I انجام داد. به عبارت دیگر f را می توان از تابع چگالی احتمالی $p(v|f)$ که خود از میانگین گیری $(I|f)$ روی تمام دنباله های داده ممکن به دست می آید، تخمین زد. یعنی

$$p(v|f) = \sum_m p(v|I^{(m)}, f) P(I^{(m)}) \quad (2-52)$$

که در آن $P(I^{(m)})$ احتمال دنباله $I = I^m$ برای $m=1, 2, \dots, M$ و M اندازه منظومه سیگنال است.

۲-۴-۲ الگوریتم گرادیان آماری

گروه دیگری از الگوریتم های همسان سازی کور، روش های همسان سازی گرادیان آماری تکراری هستند که به منظور تولید پاسخ مطلوب در هر تکرار، یک غیر خطی بی حافظه به خروجی فیلتر همسان ساز FIR خطی اعمال می نمایند.

کار را با حدس اولیه ضرایب همسان ساز بهینه که آن را با $\{c_n\}$ نشان می دهیم آغاز می کنیم. سپس کانولوشن پاسخ کanal با پاسخ همسان ساز را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$\{c_n\} * \{f_n\} = \{\delta_n\} + \{e_n\} \quad (2-53)$$

که در آن $\{\delta_n\}$ دنباله نمونه های واحد و $\{e_n\}$ بیانگر دنباله خطای ناشی از حدس اولیه ضرایب همسان ساز است. اگر پاسخ ضربه همسان ساز را با دنباله دریافتی $\{v_n\}$ کانوالو کنیم خواهیم داشت

$$\{\hat{I}_n\} = \{v_n\}^* \{c_n\} \quad (2-54)$$

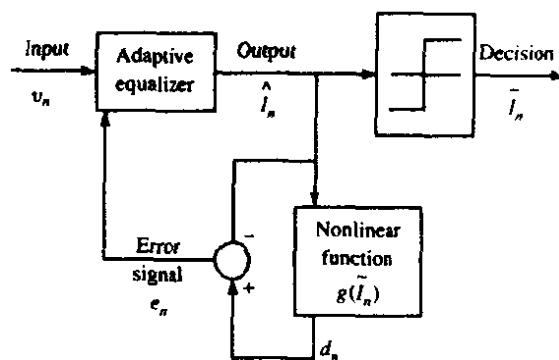
$$= \{I_n\}^* \{f_n\}^* \{c_n\} + \{\eta_n\}^* \{c_n\}$$

$$= \{I_n\}^* (\{\delta_n\} + \{e_n\}) + \{\eta_n\}^* \{c_n\}$$

$$= \{I_n\} + \{I_n\}^* \{e_n\} + \{\eta_n\}^* \{c_n\}$$

در رابطه (۲-۵۴) جمله $\{I_n\}$ بیانگر دنباله داده مورد نظر، جمله $\{e_n\}$ بیانگر تداخل بین سمبی $\{\hat{I}_n\}$ باقی مانده و جمله $\{c_n\}$ بیانگر نویز تجمعی است. مسئله ما استفاده از دنباله واکانوالوشده $\{\hat{I}_n\}$ برای یافتن بهترین تخمین پاسخ مطلوب است که معمولاً با $\{d_n\}$ نشان داده می شود. در مورد همسان سازی وفقی با استفاده از یک دنباله آموزشی، $\{d_n\} = \{I_n\}$ است. در مد همسان سازی کور پاسخ مطلوب را بایستی از روی $\{\hat{I}_n\}$ تولید نماییم.

برای تعیین بهترین تخمین $\{I_n\}$ از روی مشاهده خروجی همسان ساز $\{\hat{I}_n\}$ می توان از معیار متوسط مجاز خطا استفاده نمود. از آنجا که دنباله ارسالی $\{I_n\}$ دارای PDF غیر گوسی است، تخمین متوسط مجاز خطا یک تبدیل غیرخطی از $\{\hat{I}_n\}$ است. در حالت کلی بهترین تخمین $\{d_n\}$ سیگنال خطا تولید و مطابق شکل ۲-۴ به فیلتر همسان ساز وفقی پس خورد می شود.تابع غیرخطی مبتنی بر معیار متوسط مجاز خطا را بررسی می کنیم.



شکل ۲-۴ همسان سازی کور وفقی با الگوریتم گرادیان اماری

یک مسئله شناخته شده و کلاسیک تخمین عبارت است از این که اگر خروجی همسان ساز \hat{I}_n به صورت زیر نمایش داده شود

$$\hat{I}_n = I_n + \tilde{\eta}_n \quad (2-56)$$

که در آن $\tilde{\eta}_n$ گوسی با متوسط صفر فرض می شود (برای ISI باقی مانده و نویز تجمعی از قضیه حد مرکزی کمک می گیریم)، $\{I_n\}$ و $\{\tilde{\eta}_n\}$ از نظر آماری مستقل بوده و $\{I_n\}$ خود متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع یکسان هستند. در این صورت تخمین متوسط مجازور خطای $\{I_n\}$ عبارت است از

$$d_n = E(I_n | \hat{I}_n) \quad (2-57)$$

که وقتی $\{I_n\}$ غیر گوسی است، تابعی غیر خطی از خروجی همسان ساز است.

جدول ۲-۱ نشان دهنده صورت کلی الگوریتمهای همسان سازی کور موجود است که برای تنظیم از معیار LMS استفاده می کنند. ملاحظه می کنیم که تفاوت اساسی آنها در انتخاب غیر خطی بی حافظه است. رایجترین الگوریتم مورد استفاده در عمل، الگوریتم گدارد^۱ است که گاهی الگوریتم با قدر مطلق ثابت^۲ (CMA) نیز گفته می شود.

از جدول ۲-۱ واضح است که دنباله $\{d_n\}$ حاصل از اعمال تابع غیر خطی به خروجی همسان ساز نقش پاسخ مطلوب یا دنباله آموزشی را بازی می کند. همچنین آشکار است که پیاده سازی این الگوریتم ها ساده است، زیرا اساساً از نوع LMS هستند. به این ترتیب انتظار داریم که خصوصیات همگرایی این الگوریتم ها به ماتریس خود همبستگی داده دریافتی $\{v_n\}$ بستگی داشته باشد.

از نظر همگرایی، الگوریتم های وفقی از نوع LMS وقتی به مقدار متوسط همگرا می شوند که

$$E[v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[v_n \hat{I}_n^*] \quad (2-58)$$

و از دیدگاه متوسط مجازور وقتی که (H بیانگر ترانهاده مزدوج است)

$$E[C_n^H v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[C_n^H v_n \hat{I}_n^*], \quad E[\hat{I}_n g^*(\hat{I}_n)] = E[|\hat{I}_n|^2] \quad (2-59)$$

در نتیجه لازم است که خروجی همسان ساز $\{\hat{I}_n\}$ رابطه (۲-۵۹) را برآورده نماید. توجه کنید که رابطه (۲-۵۹) بیانگر آن است که تابع خود همبستگی $\{\hat{I}_n\}$ (طرف راست) برابر است با همبستگی متقابل بین \hat{I}_n و تبدیل غیرخطی \hat{I}_n (طرف چپ). فرایند هایی که این خصوصیت را برآورده نمایند

¹ Godard

² Constant Modules Algorithm

جدول ۱-۲ الگوریتم های گرادیان آماری برای همسان سازی کور

Equalizer tap coefficients	$\{c_n, 0 \leq n \leq N-1\}$
Received signal sequence	$\{v_n\}$
Equalizer output sequence	$\{\hat{I}_n\} = \{v_n\} \star \{c_n\}$
Equalizer error sequence	$\{e_n\} = g(\hat{I}_n) - \bar{I}_n$
Tap coefficient update equation	$c_{n+1} = c_n + \Delta v_n^* e_n$

Algorithm	Nonlinearity: $g(\hat{I}_n)$
Godard	$\frac{\hat{I}_n}{ \hat{I}_n } (\hat{I}_n + R_2 \hat{I}_n - \hat{I}_n ^3), R_2 = \frac{E\{ \hat{I}_n ^4\}}{E\{ \hat{I}_n ^2\}}$
Sato	$\zeta \operatorname{csgn}(\hat{I}_n), \zeta = \frac{E\{[\operatorname{Re}(\hat{I}_n)]^2\}}{E\{ \operatorname{Re}(\hat{I}_n) \}}$
Benveniste-Goursat	$\hat{I}_n + k_1(\hat{I}_n - I_n) + k_2 \hat{I}_n - I_n [\zeta \operatorname{csgn}(\hat{I}_n) - \bar{I}_n], k_1 \text{ and } k_2 \text{ are positive constants}$
Stop-and-Go	$\hat{I}_n + \frac{1}{2}A(\hat{I}_n - \bar{I}_n) + \frac{1}{2}B(\hat{I}_n - \bar{I}_n)^* (A, B) = (2, 0), (1, 1), (1, -1), \text{ or } (0, 0), \text{ depending on the signs of decision-directed error } \hat{I}_n - \bar{I}_n \text{ and the error } \zeta \operatorname{csgn}(\hat{I}_n) - \bar{I}_n$

از سوی بلینی^۱ (۱۹۸۶)، بوسگانگ^۲ (۱۹۵۲) نامیده شده اند. به طور خلاصه الگوریتم های داده شده در جدول ۱-۲ وقتی همگرا می شوند که دنباله خروجی همسان ساز \hat{I}_n خصوصیت بوسگانگ را برآورده نماید.

محدودیت اصلی الگوریتم های گرادیان آماری همگرایی نسبتاً آهسته آنهاست. با تغییر الگوریتمهای وفقی از LMS به نوع RLS، می توان نرخ همگرایی را تا اندازه ای بهبود بخشید.

۱-۴-۳ الگوریتم های همسان سازی کور مبتنی بر آمارگان مرتبه دوم و بالاتر سیگنال

این مطلب به خوبی شناخته شده است که آمارگان مرتبه دوم (خودهمبستگی) دنباله سیگنال دریافتی، در مورد دامنه مشخصه کانال، اطلاعاتی در اختیار ما می گذارد ولی در مورد فاز آن خیر. ولی در صورت تناوبی بودن تابع خودهمبستگی سیگنال دریافتی، نظیر یک سیگنال مدوله شده دیجیتالی این بیان صحیح نیست. در چنین حالتی به دست آوردن اندازه ای دامنه و فاز کانال از سیگنال

¹ Bellini

² Bussgang

دريافتی ممکن است. خصوصیت تناوبی و ايستادن بودن سیگنال دريافتی اساس الگوريتم تخمين کanal پیشنهاد شده توسط تانگ^۱ (۱۹۹۴ و ۱۹۹۵) را تشکيل می دهد.

همچنین تخمين پاسخ کanal از روی سینگنال دريافتی با استفاده از روش‌های آماری مرتبه بالاتر نيز امکان پذير است. به طور اخص پاسخ ضربه يک سیستم خطی گسته و تغيير ناپذير با زمان را می توان صراحتاً از گشتاورهای مرتبه بالای سیگنال دريافتی به شرط اينکه ورودی آن غير گوسی باشد به دست آورد. در اينجا روش ساده زير را که از طرف گياناكيس^۲ (۱۹۸۷) و گياناكيس و مندل^۳ (۱۹۸۹) برای تخمين پاسخ ضربه کanal از روی گشتاورهای مرتبه چهارم دنباله سیگنال دريافتی ارائه شد شرح می دهيم. برای سهولت فرض می کنیم که دنباله سیگنال دريافتی حقيقي است. گشتاور مرتبه چهارم به صورت زير تعریف می شود.

$$C(v_k, v_{k+m}, v_{k+n}, v_{k+1}) = c_r(m, n, t) \quad (2-60)$$

$$= E(v_k v_{k+m} v_{k+n} v_{k+1})$$

$$- E(v_k v_{k+m}) E(v_{k+n} v_{k+1})$$

$$- E(v_k v_{k+n}) E(v_{k+m} v_{k+1})$$

$$- E(v_k v_{k+1}) E(v_{k+m} v_{k+n})$$

گشتاور چهارم يک فرایند گوسی صفر است بنابراین نتیجه می گیریم که

$$c_r(m, n, l) = c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) \sum_{k=0}^{\infty} f_k f_{k+m} f_{k+n} f_{k+l} \quad (2-61)$$

برای دنباله ورودی به کanal، $\{I_n\}$ ، که از نظر آماری مستقل و دارای توزيع یکسان باشد، $c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) = k$ یک ثابت است که Kurtosis نamide می شود. پس اگر طول پاسخ کanal باشد، می توان $m = n = l = -L$ در نظر گرفت به طوری که L, n, m را به صورت L, n, m داریم

$$c_r(-L, -L, -L) = k f_L f_0^3 \quad (2-62)$$

به طریق مشابه اگر بگیریم $m = 0, n = L, l = p$

$$c_r(0, L, p) = k f_L f_0^2 f_p \quad (2-63)$$

¹ Tang

² Giannakis

³ Mendel

اگر روابط (۲-۶۲) و (۲-۶۳) را ترکیب کنیم، پاسخ ضربه با اختلاف یک ضریب مقیاس به صورت زیر به دست می آید

$$f_p = f_0 \frac{c_r(0, L, p)}{c_r(-L, -L, -L)}, \quad p = 1, 2, \dots, L \quad (2-64)$$

با تفکیک تخمین کanal از همسان سازی کanal، استفاده از هر نوع همسان ساز، اعم از خطی، پس خورد تصمیم و یا آشکار سازی حداکثر تشابه دنباله برای جبران تداخل بین سمبی امکان پذیر است. اشکال عمدۀ این گروه از الگوریتمها زیاد بودن میزان داده ها و پیچیدگی محاسباتی ذاتی موجود در تخمین گشتوارهای مرتبۀ بالاتر سیگنال دریافتی است.

به عنوان جمع بندی، مروری داشتیم بر سه گروه از الگوریتم های همسان سازی کور مورد استفاده در مخابرات دیجیتال. از این سه گروه، الگوریتم های مبتنی بر معیار حداکثر تشابه که پاسخ ضربه کanal و دنباله داده را مشترکاً تخمین می زند، بهینه بوده و برای انجام تخمین کanal به نمونه های نسبتاً کمی از سیگنال دریافتی نیاز دارند. اما وقتی گستره تداخل بین سمبی تعداد زیادی سمبی را در برگیرد پیچیدگی محاسباتی آنها زیاد است. در برخی کanal ها نظیر کanal های رادیوئی متحرک که گستره تداخل بین سمبی نسبتاً کوتاه است، پیاده سازی این الگوریتم ها آسان است. در کanal های تلفنی که گستره تداخل بین سمبی تعداد زیادی سمبی را در برگرفته ولی معمولاً خیلی شدید نیست، عموماً از الگوریتمهای نوع LMS (گرادیان آماری) استفاده می شود.

بخش سوم: همرشتاین فیلترینگ

در این فصل ابتدا به معرفی سیستم همرشتاین^۱ پرداخته، سپس به ارائه روشی برای تطبیق دادن و به روز کردن ضرائب آن می پردازیم. سیستمهای همرشتاین عموماً دسته ای از سیستمهای غیرخطی هستند که شامل یک بلوک غیرخطی استاتیک^۲ بوده که به صورت سری با یک سیستم خطی دینامیک^۳ مجموعه فیلتر را تشکیل می دهد. در این روش سیستم غیرخطی توسط یک فیلتر چند جمله ای^۴ و سیستم خطی توسط یک فیلتر با پاسخ ضربه نامحدود^۵ پیاده سازی می شوند. فرایند تطبیق دادن المان-های غیرخطی توسط عمودسازی بردار ورودی به ضرائب سیستم چند جمله ای صورت می گیرد. اساساً در ارائه روشهای فیلترینگ جهت متعادلسازی، سعی می شود اندازه تغییرات^۶ به گونه ای انتخاب شود که پایداری کل سیستم را تضمین کند. پس از ارائه روش پیشنهادی، درباره پایداری آن نیز به تفصیل سخن خواهیم گفت.

¹ Hammerstein system

² Static Nonlinearity

³ Linear Dynamics

⁴ Polynomial Filter

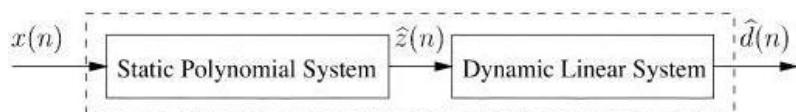
⁵ Infinit Impulse Response(IIR)

⁶ Step size

۳ - ۱ - معرفی سیستم همرشتاین

همانطور که می دانیم، شناسائی سیستم ها در حوزه های فنی و غیرفنی حائز اهمیت فراوان می باشد. به طور تقریبی می توان گفت همه سیستم های شناخته شده رفتار غیرخطی دارند، بنابراین بهتر است برای توضیح یک سیستم از مدل غیرخطی استفاده کرد [1]. سیستم های وینر^۱ و همرشتاین اثبات کرده اند که روش مناسبی برای مدل سازی سیستمهای دینامیک غیرخطی که در آن ها قسمت غیرخطی استاتیک و بخش دینامیک خطی از یکدیگر در مرتبه های مختلف جدا شده اند، می باشند.

هدف ما توضیح نحوه پیاده سازی و کارائی تجربی یک الگوریتم تطبیقی است که از مدل سیستم همرشتاین استفاده می کند. سیستمهای همرشتاین متشکل از سیستم های غیرخطی بدون حافظه بوده که با یک سیستم خطی، همانند شکل ۱-۳، به صورت سری قرار گرفته اند. کاربردهای فراوانی از سیستمهای غیرخطی سری تابه امروز شناخته شده اند که از میان آنها می توان به مدل سازی سیستمهای مخابرات ماهواره ای، سیستمهای بیولوژیکی، درایور های الکتریکی و تقویت کننده ها اشاره کرد.



شکل ۱ - ۳ - بلوک دیاگرام یک سیستم همرشتاین

تاکنون، تعدادی از روش های غیر پارامتریک برای شناسائی سیستمهای همرشتاین ارائه شده اند. اما در میان روش های پارامتریک ما روشی را برابر می گزینیم که در آن سیستم چند جمله ای و زیر سیستم دینامیک خطی، به صورت تکراری تخمین زده می شوند. در میان روش هایی که تاکنون برای پیاده سازی این سیستم ها مطرح شده اند، روش های مبتنی بر گرادیان اتفاقی^۲ و همچنین روش مبتنی بر طراحی فیلتر کالمن از شهرت بیشتری برخوردارند. هر چند در این روشها فرض بر این بوده که پارامتر های مدل غیرخطی ثابت باشند. از نقطه نظر پایداری، فعالیتهایی بر روی سیستمهای مبتنی بر فیلتر های FIR^۳ صورت گرفته است، با این حال بررسی پایداری برای مدل IIR کم و یا بسیار محدود بوده است.

فرض کنید رابطه ورودی خروجی فیلتر تطبیقی به صورت زیر باشد

¹ Wiener Systems

² Stochastic Gradient

³ Finite Impulse Response

$$\hat{d}(n) = -\sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n) \hat{d}(n-i) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \hat{z}(n-j) \quad (3-1)$$

در حالی که

$$\hat{z}(n) = \sum_{l=1}^L \hat{p}_l(n) x_l(n) \quad (3-2)$$

خروجی سیستم چند جمله‌ای بدون حافظه غیرخطی و $x(n)$ ورودی فیلتر تطبیقی می‌باشد. در معادلات بالا، $\hat{b}_j(n)$ و $\hat{a}_i(n)$ معرف ضرائب فیلتر تطبیقی در زمان n هستند. با تنظیم $\hat{b}_0(n) = 1$ برای تمام n ‌ها، برای داشتن راه حل یکتا در طول فرایند شناسائی، معادله ۱ - ۳ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \hat{d}(n) &= Z(n) - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n) \hat{d}(n-i) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \hat{z}(n-j) \\ &= \sum_{l=1}^L \hat{p}_l(n) x_l(n) - \sum_{i=0}^N \hat{a}_i(n) \hat{d}(n-i) + \sum_{j=1}^M \hat{b}_j(n) \hat{z}(n-j) \end{aligned} \quad (3-3)$$

عبارت فوق از نقطه نظر داده‌ها دارای ماهیت غیرخطی و از دیدگاه پارامترها خطی است، بنابراین عبارتی ایده‌آل برای پیاده سازی سیستم همرشتاین می‌باشد. همچنین تأکید می‌شود که با ثابت کردن هر یک از ضرائب در سیستم می‌توان یکتا بودن پاسخ سیستم را تضمین کرد.

هدف فیلتر تطبیقی ارائه شده در این پایان نامه، به روز کردن ضرائب مدل غیرخطی توسط روش گرادیان اتفاقی می‌باشد به طوری که مربع خطای تخمین زده شده لحظه‌ای در هر بار تکرار کاهش یابد. با عمود کردن سیگنال ورودی به زیر سیستم چند جمله‌ای، علی الخصوص زمانی که سیستم استاتیک غیرخطی از مرتبه بالا باشد، می‌توان رفتار همگرایی سیستم را بهبود بخشد. برای حالت‌هایی که مرتبه غیرخطی بالا است، ماتریس خود همبستگی^۱ مربوط به بردار سیگنال‌های غیرخطی

گسترش مقادیر ویژه وسیعی دارد. در روش ارائه شده، مسئله‌ای که پیش روی چنین حالتی برای به روز کردن ضرائب قرار دارد، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. به علاوه، زیر سیستم IIR

¹ Autocorrelation Matrix

تطبیقی با به کار بردن دنباله اندازه حرکت، پایداری سیستم را تضمین می کند. در واقع از روش پایداری لیاپانوف^۱ جهت پایداری فیلتر IIR استفاده شده است.

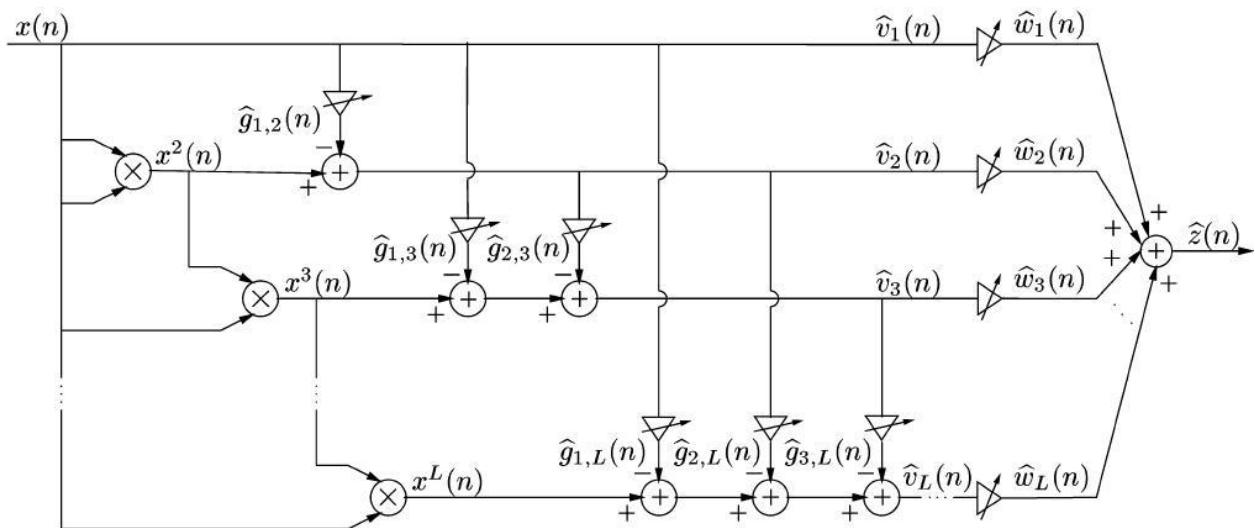
۳ - الگوریتم تطبیقی برای مدل هم رشتاین

فرض کنید $x(n)$ و $d(n)$ به ترتیب معرف سیگنال ورودی به سیستم و سیگنال مطلوب باشند.

شکل ۲ - ۳ روشی را که برای متعامد سازی سیگنال های ورودی به زیر سیستم چند جمله ای تطبیقی در نظر گرفته شده است نشان می دهد. هدف از به کارگیری متعامد ساز گرام - اشمیت تولید سیگنال های $v_1(n), v_2(n), \dots, v_L(n)$ به گونه ای است که داشته باشیم

$$E\{\hat{v}_i(n)\hat{v}_j(n)\} = 0 \quad (3-4)$$

و سیگنال های مجموعه $\{\hat{v}_i(n), i = 1, 2, \dots, L\}$ فضایی را که توسط سیگنال های مجموعه $\{\hat{v}_i(n), i = 1, 2, \dots, L\}$ پوشش داده شده بودند را، پوشش می دهند. هدف، تطبیق دادن ضرائب $\hat{g}_{i,j}(n)$ به گونه ای است که معادله ۴ - ۳ با تقریب خوبی تحقق یابد.



شکل ۲ - ۳ متعامد سازی زیر سیستم غیر خطی

سیگنال های خروجی از متعامد ساز گرام - اشمیت، برای بدست آوردن خروجی میانی $\hat{Z}(n)$ مورد استفاده قرار می گیرند

^۱ Lyapunov Stability

$$\hat{Z}(n) = \sum_{i=1}^L \hat{\omega}(n) \hat{V}_i(n). \quad (3-5)$$

هدف ما، به روز کردن ضرائب $\hat{d}(n)$ و $\hat{b}_j(n)$ و $\hat{a}_i(n)$ و $\hat{w}_l(n)$ به گونه ای است که $\hat{d}(n)$ تا حد ممکن به سیگنال پاسخ مربوطه نزدیک باشد. بنابراین ما به دنبال الگوریتم تطبیقی گرادیان اتفاقی ای هستیم که در جهت کاهش عبارت زیر گام بردارد.

$$J\left(\hat{a}_1(n), \dots, \hat{a}_N(n), \hat{b}_0(n), \hat{b}_1(n), \dots, \hat{b}_M(n), \hat{\omega}_1(n), \dots, \hat{\omega}_L(n)\right) \\ = [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2 \quad (3-6)$$

این در حالی است که اطلاعات ماقبل $\hat{d}_{ap}(n)$ به صورت زیر بدست می آیند

$$\hat{d}_{ap}(n) = - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n-1) \cdot \hat{d}(n-i) + \sum_{j=1}^M \hat{b}_j(n-1) \cdot \hat{z}(n-j) \quad (3-7)$$

همچنین به روز کردن ضرائب متعامدسانز گرام اشمیت مورد نیاز است. به روز رسانی ضرائب برای

$$\hat{a}_i(n) = \hat{a}_i(n-1) - \mu_i(n) \frac{\partial \left(\frac{1}{2} [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2 \right)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \\ = \hat{a}_i(n-1) + \mu_i(n) [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)] \frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \quad (3-8)$$

$$\hat{b}_j(n) = \hat{b}_j(n-1) - \mu_{N+j}(n) \frac{\partial \left(\frac{1}{2} [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2 \right)}{\partial \hat{b}_j(n-1)} \\ = \hat{b}_j(n-1) + \mu_{N+j}(n) [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)] \frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{b}_j(n-1)} \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_\ell(n) &= \hat{\omega}_\ell(n-1) - \mu_{N+M+\ell}(n) \frac{\partial \left(\frac{1}{2} [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2 \right)}{\partial \hat{w}_\ell(n-1)} \\
&= \hat{\omega}_j(n-1) + \mu_{N+M+\ell}(n) [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)] \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{w}_\ell(n-1)}
\end{aligned} \tag{3-10}$$

و $1 \leq l \leq p$ و $1 \leq i \leq N$ و $0 \leq j \leq M$ در معادلات فوق، $\mu_i(n)$ ها معرف اندازه قدم هائی است که توسط الگوریتم تطبیقی به کار گرفته شده اند و رشته های مثبت و کوچکی هستند. برای بدست آوردن معادلات واضح تر، مشتقات جزئی معادلات ۹ تا ۱۰ را

بسط می دهیم. حل معادله با مشتقات جزئی برای $\hat{d}_{ap}(n-1)$ به صورت زیر است

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} = -\hat{d}(n-i) - \sum_{s=1}^N \hat{a}(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \tag{3-11}$$

همانطور که در تحلیل فیلترهای IIR تطبیقی رایج است، فرض می کنیم تطبیق به قدری آهسته صورت می گیرد که شرایط زیر برقرار باشند

$$\frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-s)}; \quad 1 \leq i \leq N \tag{3-12}$$

$$\frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_i(n)}; \quad 1 \leq i \leq N \tag{3-13}$$

با جایگذاری عبارات در معادله ۱۱ - ۳ خواهیم داشت

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_i(n)} \approx -\hat{d}(n-i) - \sum_{s=1}^N \hat{a}(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-s)}, \quad 1 \leq i \leq N \tag{3-14}$$

به روش مشابه داریم

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{b}_j(n)} \approx -\hat{z}(n-j) - \sum_{s=1}^M \hat{a}(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{b}_j(n-s)}, \quad 0 \leq j \leq M \tag{3-15}$$

در نهایت معادله به روز رسانی برای زیر سیستم چند جمله ای به صورت زیر داده می شود

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)} = -\sum_{s=1}^N \hat{a}(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-s)} + \sum_{s=1}^M \hat{b}(n-1) \hat{v}_l(n-s) \frac{\partial \hat{\omega}_l(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)}; 1 \leq \ell \leq L \quad (3-16)$$

همانند قبل فرض کرده ایم فرایند تطبیق بسیار آهسته و تقریبیهای زیر برقرارند

$$\frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-s)}; \quad (3-17)$$

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_l(n)} \quad (3-18)$$

$$\frac{\partial \hat{\omega}_l(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)} = 1 \quad (3-19)$$

با ترکیب کردن معادلت ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ می توانیم به عبارت بسته زیر برای به روز کردن ضرائب

برسیم

$$\phi(n) = \psi(n) - \sum_{s=1}^N \hat{a}(n-1) \cdot \phi(n-s) \quad (3-20)$$

در حالیکه داریم

$$\phi(n) = \left[\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_1(n)} \dots \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_N(n)} \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{b}_1(n)} \dots \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{b}_M(n)} \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_1(n)} \dots \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_L(n)} \right]^T \quad (3-21)$$

و بردار اطلاعات توسط رابطه زیر داده می شود

$$\phi(n) = \left[-\hat{d}(n-1) \dots -\hat{d}(n-N) \hat{z}(n-1) \dots \hat{z}(n-M) \sum_{j=0}^M \hat{b}(n) \hat{v}_1(n-j) \dots \sum_{j=0}^M \hat{b}(n) \hat{N}_L(n-j) \right]^T \quad (3-22)$$

به همین ترتیب بردار پارامترها را به صورت زیر معرفی می کنیم

$$\hat{\theta}(n) = \left[\hat{a}_1(n) \dots \hat{a}_N(n) \hat{b}_1(n) \dots \hat{b}_M(n) \hat{\omega}_1(n) \dots \hat{\omega}_L(n) \right]^T, \quad b_0(n) = 1 \quad (3-23)$$

و برای بردار داده داریم

$$\hat{H}(n) = \left[-\hat{d}(n-1) \cdots -\hat{d}(n-N) \hat{z}(n-1) \cdots \hat{z}(n-M) \hat{v}_1(n) \cdots \hat{v}_L(n) \right]^T \quad (3-24)$$

سپس ، معادلات به روز کردن ضرائب فیلتر در فرم ماتریسی را به صورت زیر خواهیم داشت

$$e(n) = d(n) - \hat{H}(n)^T \hat{\theta}(n-1) \quad (3-25)$$

$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + \Lambda(n) \phi(n) e(n) \quad (3-26)$$

$$\Lambda(n) = \text{diag}[\mu_1(n) \cdots \mu_{N+M+L}(n)] \quad (3-27)$$

برای بهبود رفتار همگرائی فیلتر تطبیقی، از فرم نرمالیزه شده فیلتر به صورت زیر استفاده می کنیم

$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + \frac{\Lambda(n) \phi(n)}{\delta + \hat{H}(n)^T \Lambda(n) \phi(n)} e(n) \quad (3-28)$$

که در آن δ یک عدد ثابت مثبت کوچک بوده و کاربرد آن جلوگیری از تقسیم بر اعداد بسیار کوچک در حالتی که $\hat{H}(n)^T \Lambda(n) \phi(n) = 0$ عددی کوچک است می باشد. این انتخاب نرمالیزه شده برای $\delta = 0$ منتج به خطای صفر به صورت استقرائی می شود. بعلاوه، در میان روش‌های بسیاری که دارای چنین نتیجه‌ای هستند، عبارت برگزیده شده، دارای کوچکترین اختلال در بردار ضرائب می باشد. در نهایت از روش نیوتن برای بهبود به روز کردن ضرائب استفاده می کنیم. این کار با تغییر مقیاس بردار افزایش ضرائب توسط معکوس ماتریس خود همبستگی بردار اطلاعات صورت می گیرد. ماتریس $R(n)$ از روش بازگشتی به صورت زیر محاسبه می شود

$$R(n) = \lambda R(n-1) + (1-\lambda) \phi(n) \phi^T(n) \quad (3-29)$$

که در آن $1 < \lambda \leq 0$ است. معکوس آن توسط لم معکوس کردن ماتریس به صورت بازگشتی بدست می آید

$$R^{-1}(n+1) = \frac{1}{\lambda} \left(R^{-1}(n) - \frac{R^{-1}(n) \phi(n) \phi^T(n) R^{-1}(n)}{\frac{\lambda}{1-\lambda} + \phi^T(n) R^{-1}(n) \phi(n)} \right) \quad (3-30)$$

در هنگام پیاده سازی معادله ۳۰ - ۳، باید ملاحظات مربوط به تقارن $R^{-1}(n+1) = R^{-1}(n)$ در نظر گرفته شود. با جایگذاری معادله ۳۰ در ۲۸ به معادله به روز رسانی فیلتر تطبیقی می رسیم

$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + \frac{\Lambda(n)\phi(n)}{\delta + \hat{H}^T \Lambda(n)\phi(n)} e(n) \quad (3-31)$$

این طور به نظر می رسد که متعامد سازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای به همراه متعامد سازی مهیا شده توسط استراتژی به روز کردن نیوتن، قابلیت اطمینان بالائی حتی در حضور کانالهایی با مرتبه غیرخطی بالا به مامی دهد.

۳ - ۳ - متعامد سازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای

همانطور که در شکل ۲ - ۳ ملاحظه شد، در فرایند متعامد سازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای داریم

$$\hat{v}_1(n) = x(n) \quad (3-32)$$

مابقی سیگنال های متعامد به صورت زیر محاسبه می شوند

$$\hat{v}_\ell(n) = x^\ell(n) - \sum_{j=1}^{e-1} \hat{g}_{j,\ell}(n) \hat{v}_j(n), \ell = 2, \dots, L \quad (3-33)$$

از آنجائی که سیگنال میانگین مربع خطابه به ورودی ها عمود است، استراتژی به روز رسانی ای که در جهت کاهش $e_{j,l}^2(n)$ قدم بردارد به صورت زیر داده می شود

$$e_{j,\ell}(n) = x^\ell(n) - \sum_{s=1}^j \hat{g}_{s,\ell}(n) \hat{v}_s(n), \ell = 2, \dots, L, j = 1, \dots, \ell-1 \quad (3-34)$$

بنابراین استراتژی به روز رسانی ضرائب مربوط به پردازشگر گرام - اشمیت، به صورت زیر نوشته می شود

$$\hat{g}_{j,\ell}(n+1) = \hat{g}_{j,\ell}(n) + \frac{\mu_{j,\ell}(n)}{\delta_{v_j} + \sigma_{v_j}^2} \cdot e_{j,\ell}(n) \cdot \hat{v}_j(n), \ell = 2, \dots, L, j = 1, \dots, \ell-1 \quad (3-35)$$

که در آن ها δ_0 یک ضریب ثابت مثبت و $\sigma_{v_j}^2(n)$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$\hat{\sigma}_{v_j}^2(n) = \lambda \hat{\sigma}_{v_j}^2(n-1) + (1 - \lambda_g) \hat{v}_j^2(n), j = 1, \dots, \ell-1, 0 < \lambda_g < 1 \quad (3-36)$$

۴-۳ انتخاب اندازه حرکت (قدم)

اساس انتخاب اندازه قدم، که عملکرد پایدار زیر سیستم IIR را تضمین کند، قضیه زیر است

قضیه: معادله حالت خطی زیر

$$X_s(n+1) = A(n)X_s(n) \quad X_s(n_0) = x_0 \quad (3-37)$$

پایدار از نظر نمائی و یکنواخت است، اگر و تنها اگر رشته ماتریس‌های N^*N به شکل $Q(n)$ به صورت متقابن برای تمام n ها وجود داشته باشد به طوریکه

$$\eta I \leq Q(n) \leq \rho I \quad (3-38)$$

$$A^T(n)Q(n+1)A(n) - Q(n) \leq -\gamma I \quad (3-39)$$

که در آنها η ، ρ و γ ثابت، مثبت و محدود هستند. شرط وجود ثابت مثبت η برای $Q(n)$ برای تمام n ها، معادل تعریف وجود η مثبت در رابطه $\|X_\eta\|^2 \leq X_\eta^T Q(n) X_\eta$ برای تمام n ها و تمام بردارهای $1^* N X_\eta$ که در آن $\|X_\eta\| = \sqrt{X_\eta^T X_\eta}$ است، می باشد. این، همان شرایط لیاپانوف می باشد. از آنجایی که الگوریتم تطبیق به فرم زیر است

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \mu(n)\varphi_L(n) \quad (3-40)$$

$$\varphi_n(n) = (\Lambda(n)R^{-1}(n+1)\varphi(n)) / (\delta + \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n)e(n))$$

می توان بیان فرم مستقیم¹ فیلتر IIR را تبدیل به فرم فضای حالت کرده و از قضیه فوق استفاده کنیم سیستم هم‌شتاین در فرم فضای حالت به صورت زیر نوشته می شود

$$X_s = A(n)X_s(n) + B(n)u_s(n) \quad (3-41)$$

$$y_s(n) = C(n)X_s(n) + D(n)u_s(n) \quad (3-42)$$

که در آنها

$$X_s(n) = [\hat{d}(n-1) \ \hat{d}(n-2) \ \dots \ \hat{d}(n-N)]^T \quad (3-43)$$

$$u_s(n) = [\hat{z}(n-1) \ \hat{z}(n-2) \ \dots \ \hat{z}(n-M) \ \hat{v}_1(n) \ \dots \ \hat{v}_L(n)]^T \quad (3-44)$$

$$y_s(n) = [\hat{d}(n) \ \hat{z}(n)]^T \quad (3-45)$$

¹ Direct Form Representation

$$A(n) = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1(n) & -\hat{a}_2(n) & \dots & -\hat{a}_{N-1}(n) & -\hat{a}_N(n) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

$$B(n) = \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n) & \hat{b}_2(n) & \dots & \hat{b}_M(n) & \hat{w}_1(n) & \dots & \hat{w}_L(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

$$C(n) = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1(n) & -\hat{a}_2(n) & \dots & -\hat{a}_{N-1}(n) & -\hat{a}_N(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

$$D(n) = \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n) & \hat{b}_2(n) & \dots & \hat{b}_M(n) & \hat{w}_1(n) & \dots & \hat{w}_L(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{w}_1(n) & \dots & \hat{w}_L(n) \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

ضرائب در زمان های n و $n+1$ باید نامساوی زیر را برآورده کند

$$\|vec[Q(n+1)] - vec[Q(n)]\| < 1 \quad (3-50)$$

$$vec[Q(n+1)] = -[A^T \otimes A^T - I_{N^2}]^{-1} vec[I_N] \quad (3-51)$$

در عبارات فوق $vec[.]$ نشانگر عملگری است که در آن ستون های یک ماتریس پشت سر یکدیگر قرار می گیرند که یک بردار ستونی را تشکیل دهند و \otimes علامت ضرب کرونوکر¹ می باشد. در حین کار فیلتر و فقی، اندازه قدم ها به گونه ای انتخاب می شوند که از ماکزیمم از پیش تعیین شده کوچکتر باشند و یا ماکزیمم مقداری باشند که نا مساوی ۵۰ را برآورده کنند. این انتخاب به صورت زیر انجام می گیرد: برای هر اندازه قدم داده شده در هر تکرار ما مقادیر جدید پارامتر های \hat{a}_i را محاسبه کرده،

¹ Kroncker Product

با استفاده از معادله ۵۱، $ved[Q(n+1)]$ را حساب می کنیم. سپس بررسی می کنیم که آیا معادله ۵۰ برقرار است و یا نه. این الگوریتم تضمین می کند که تمام قطب های لحظه ای سیستم درون دایره واحد باشند، بنابراین نیاز به چک کردن مجدد محل قطب ها نیست. به علاوه ما اندازه قدم ها در (n) را کاهش می دهیم به طوریکه $0 > \delta + \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n)$ که در آن δ یک ثابت مثبت کوچک، $\beta < 0$ این مسئله تضمین می کند که علامت بردار گرادیان ثابت بماند، یعنی تضمین می شود $(\Lambda(n)R^{-1}(n + \delta\hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n))\varphi(n) > 0$ عبارت متناظر با (n) بیان شده در بالا، یعنی $\delta + \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n)/(\delta + \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n)e(n))$ ضرائب را به سمت صحیح هدایت کند، به طوریکه مربع خطای تقریبی لحظه ای را در هر بار تکرار، همانطور که هدف الگوریتم بود، کاهش می دهد. برای مقادیر ثابت β که مؤکداً کوچکتر از ۱ هستند، می توان همگرایی الگوریتم را به می نیم سطح خطانشان داد. اکنون تمام معادلات لازم برای پیاده سازی الگوریتم در دست هستند.

۵-۳ پیچیدگی محاسباتی

برای سادگی بیشتر فرض می کنیم N ، تعداد ضرائب فیدبک زیر سیستم خطی، از M ، تعداد ضرائب پیش سو و از L تعداد ضرائب زیر سیستم چند جمله ای بزرگتر و یا مساوی آنان باشد. الگوریتم ارائه شده در بالا می تواند توسط $O(N^{2.25} + LN^2)$ عملیات محاسباتی در هر بار تکرار، پیاده سازی شود.

در سه قسمت از الگوریتم، نیاز به تعداد بیشتری محاسبه نسبت به پیچیدگی خطی $O(N+M+L)$ نیاز است. متعامدساز گرام اشمیت نیاز به $O(L^2)$ عملیات برای پیاده سازی دارد (در هر بار تکرار). عملیات جستجو برای یافتن اندازه قدمی که پایداری الگوریتم را تضمین کند نیاز به محاسبه ماتریس معکوس $[A^T \otimes A^T - I_{N^2}]^{-1}$ دارد. از آنجایی که این ماتریس کوچک بوده و بیشتر از ۵ عنصر غیر صفر در هر ردیف ندارد، روشانی وجود دارند که ماتریس را با پیچیدگی محاسباتی متناظر با $O(N^{2.25})$ عملیات ریاضی تبدیل می کنند. بخش سوم پیچیدگی محاسباتی مربوط به محاسبه $(n)R^{-1}$ میباشد که از نتیجه آن برای به روز کردن ضرائب استفاده می شود. الگوریتم های سریع برای معکوس کردن ماتریس خود همبستگی با $O(L^2N)$ عملیات ریاضی موجود می باشند. به روز کردن ضرائب، همانطور که در معادله ۳۱ - ۳ آمده است نیاز به تعداد $O((N+M+L)^2)$ عملیات بیشتر دارد. با مفروضات $N \leq L$ و $M \leq N$ این پیچیدگی می تواند با $O(N^2)$ محاسبه بیان شود. البته

الگوریتم ارائه شده در این پایان نامه دارای پیچیدگی بالاتری است، چرا که از مفروضات ساده سازی در محاسبه معکوس ماتریس استفاده نشده است.

۶-۳ پایداری فیلتر هم رشتاین تطبیقی

در این بخش به بررسی پایداری سیستم در رژیم خروجی محدود به ازای ورودی محدود (BIBO)، توسط لم معرفی شده در ادامه می پردازیم.

اگر معادله حالت خطی ۳-۳۷ به طور یکنواخت، پایدار نمائی باشد و مقادیر محدود و ثابت زیر وجود داشته باشند به طور یکه

$$\|B(n)\| \leq C_B, \|C(n)\| \leq C_C, \|D(n)\| \leq C_D \quad (3-52)$$

معادلات حالت ۴۱ و ۴۲ نیز به طور یکنواخت پایدار BIBO خواهد بود.

انتخاب دنباله اندازه قدم تضمین می کند که سیستم همگن^۱ ۳-۳۷ به طور یکنواخت و نمایی پایدار باشد. برای برآورده شدن شرایط در ۵۲-۳، ما مقادیر $B(n)$ ، $C(n)$ ، $D(n)$ را به اعدادی بزرگ اما معین محدود می کنیم. در شبیه سازی، این مقدار برابر با ۱۰۰ انتخاب شده است. فرض شده است سیگنال ورودی $X(n)$ به خودی خود محدود باشد. معادله به روز کردن ضرائب در ۳۵ یک معادله فیلتر از نوع FIR بود که برای اندازه قدم های به اندازه کافی کوچک، پایدار می باشد در نتیجه تمام سیگنال های $\hat{z}(n)$ محدود خواهد بود. خروجی میانی $\hat{z}(n)$ به صورت $\hat{z}(n) = \hat{w}_1 \hat{v}_1 + \dots + \hat{w}_n \hat{v}_n$ محاسبه می شود. از آنجایی که \hat{v}_ℓ با مقادیر مشخص محدود شده است و \hat{w}_ℓ ها نیز محدود هستند، $\hat{z}(n)$ نیز محدود خواهد بود.

برای معادلات حالت خطی ۴۱ و ۴۲ که به صورت یکنواخت پایدار BIBO هستند، ثابت محدود $\|u_s(n)\|$ به طوری وجود دارد که برای هر زمان اولیه مشخص n_0 و هر سیگنال ورودی $u_s(n)$ ، پاسخ حالت صفر مربوطه در محدوده زیر قرار خواهد داشت

$$\sup\|y_s(n)\| \leq \eta \sup\|u_s\|, \quad n \geq n_0 \quad (3-52)$$

عبارت یکنواخت به این معناست که η مشابه می تواند برای تمام مقادیر n_0 و برای تمام سیگنال های ورودی مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین پایداری BIBO یکنواخت تضمین می کند که رفتار ورودی -

¹Homogenous

خروجی فیلتر هم رشتاین تطبیقی، بهره محدودی بر حسب ورودی و خروجی ها ارائه می دهد. در نتیجه فیلتر تطبیقی ارائه شده در این بخش رفتار پایداری از خود نشان می دهد.

بخش چهارم: نتایج شبیه سازی

در این قسمت نتایج شبیه سازی های متعدد که برای سنجش و ارزیابی عملکرد فیلتر منطبق ارائه شده در بخش سه به کار رفته اند را ارائه می دهیم. تمام شبیه سازی ها درگیر با شناسائی یک سیستم هم رشتاین ناشناخته می باشند. در آزمایش اول، رابطه ورودی خروجی سیستم غیرخطی بدون حافظه به صورت زیر است

$$z(n) = 0.4x(n) - 0.3x^2(n) + 0.2x^3(n) \quad (4-1)$$

و تابع تبدیل بخش خطی به صورت زیر در نظر گرفته شده است

$$H(z) = \frac{1+0.8z^{-1}}{1-1.2z^{-1}+0.5z^{-2}} \quad (4-2)$$

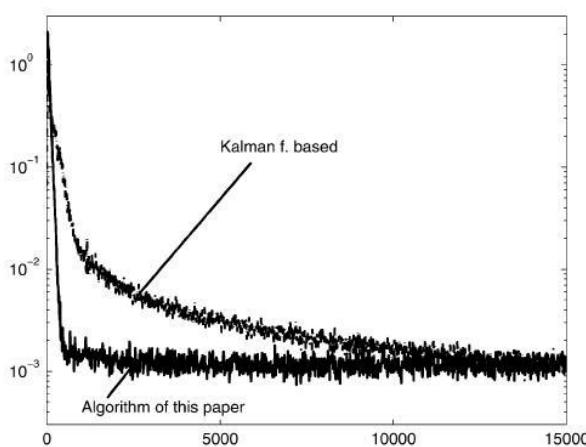
سیگنال پاسخ مطلوب فیلتر تطبیقی توسط تجمیع نویز با میانگین و واریانس صفر با سیگنال خروجی از سیستم ناشناخته بدست آمده است، به طوریکه نسبت سیگنال به نویز خروجی برابر 20 dB باشد. سیگنال ورودی به فیلتر منطبق توسط عبور یک سیگنال یکنواخت با میانگین صفر و واریانس 0.19 از فیلتر زیر بدست آمده است

$$H(z) = 1 + 0.95z^{-2} \quad (4-2)$$

نحوه پیاده سازی فیلتر تطبیقی به این صورت است که اندازه قدم متغیر با زمان در بخش بازگشته دارای ماکزیمم $1.5 \times 10^{-5} \mu\text{m}$ بوده و یا توسط محدوده پیشنهادی در شرایط $50 - 3$ تأمین شود. اندازه

قدم برای ضرائب بخش پیش سو در زیر سیستم خطی و ضرایب زیر سیستم چند جمله ای ثابت و $\mu = 1.5 \times 10^{-5}$ می باشند. اندازه قدم برای ضرائب متعامد ساز ثابت و برابر $10^{-4} \times 5$ فرض شده اند. به همین ترتیب $\delta = 10^{-5}$ ، $\lambda_g = 0.99$ ، $\beta = 0.95$ فرض شده اند. مقدار اولیه ماتریس R^{-1} به صورت یک ماتریس قطری با مقادیر $\hat{b} = 1$ روی قطر اصلی فرض شده است. مقدار اولیه $\hat{\delta} = 10^2$ در نظر گرفته شده است. حالت اولیه سیستم به شکلی طراحی شده است که قطب و صفرهای زیر سیستم خطی در مبدأ قرار داشته و مقدار اولیه ضرائب چند جمله ای برابر صفر باشند. ضریب \hat{b} برابر یک قرار داده شد و در تمامی طول شبیه سازی تغییر داده نشده است. به این ترتیب یکتائی پاسخ تضمین می شود. جهت تضمین پایداری BIBO متعامدساز و قسمت پیش سوی فیلتر خطی تطبیقی، یک محدوده بالائی برای مقدار مطلق متعامد ساز و ضرائب پیش سو در نظر گرفته شده است. کارائی عملکرد این روش، با روشی که در آن از فیلتر کالمن استفاده شده است مقایسه می شود. مقدار اولیه ماتریس کوواریانس خطای $(n)p$ در روش بر پایه فیلتر کالمن، یک ماتریس قطری با مقادیر $1/000$ روی قطر اصلی بوده است. پارامترها به گونه ای انتخاب شده اند که میانگین مربع خطای اضافی برای هر دو الگوریتم تقریباً برابر بوده است.

شکل ۱ - ۴، مقدار میانگین مربع خطای برای هر دو الگوریتم با ارسال ۱۵۰۰۰ نمونه نشان می دهد. نتایج نشان می دهد که الگوریتم ارائه شده، همگرائی سریعتری نسبت به الگوریتم بر پایه فیلتر کالمن دارد. جدول ۱ - ۴، مشخصات آماری هر دو الگوریتم را نشان می دهد [3].



شکل ۱ - ۴ میانگین مربع خطای برای هر دو الگوریتم

Coeff.	True	Algorithm of this paper		Kalman based [9]	
		Mean	Var. $[10^{-4}]$	Mean	Var. $[10^{-4}]$
\hat{a}_1	-1.2	-1.2018	0.6931	-1.2362	0.4406
\hat{a}_2	0.5	0.5012	0.3920	0.5260	0.2277
\hat{b}_0	1	-	-	-	-
\hat{b}_1	0.8	0.7952	2.4026	0.6577	6.9609
\hat{p}_1	0.4	0.4006	0.2428	0.4175	0.1804
\hat{p}_2	-0.3	-0.2998	0.6038	-0.3149	0.0768
\hat{p}_3	0.2	0.1977	0.9330	0.2063	0.0681

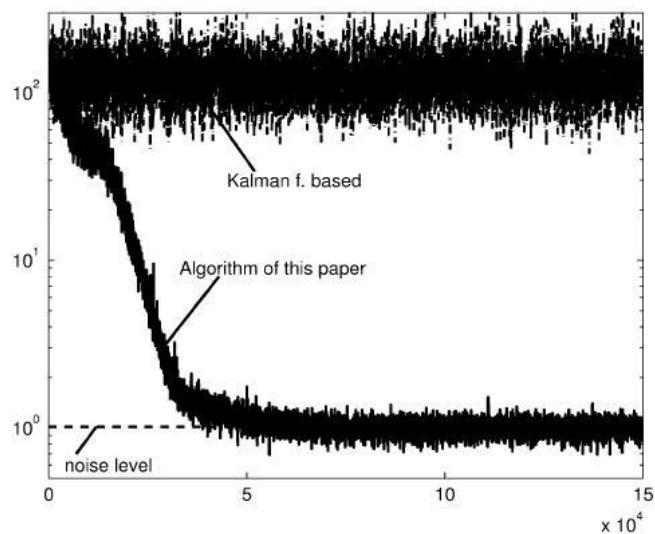
جدول ۱ - ۴ مقایسه عملکرد دو فیلتر تطبیقی

ضرائب سیستم چند جمله ای \hat{p}_i با تبدیل معکوس ضرائب \hat{p}_i به شکل مستقیم بدست آمده اند. مقدار میانگین موجود در جدول ۱ - ۴ برای الگوریتم ارائه شده، برای ۵۰۰ نمونه آخر محاسبه شده است. مقدار واریانس نیز به همین ترتیب بدست آمده است. همانطور که قبل از هم مشخص شده بود، الگوریتم در حالت کاملاً پایدار عمل کرده و همگرائی آن در تمام تکرارها مشخص شده است. مشاهده می شود که عملکرد سیستم در شرایط مختلف حتی در حالت $SNR=0$ نیز قابل قبول می باشد.

در شبیه سازی بعدی ، فیلتر تطبیقی ای که برای مسئله شناسائی سیستم در نظر گرفته شده است بخش خطی یک سیستم ناشناخته است که رابطه زیر را برآورده می کند

$$H(z) = \frac{\tilde{D}(z)}{Y(z)} = \frac{1-1.3334z^{-1}+1.6667z^{-2}-2.665z^{-3}+1.9666z^{-4}}{1-2.6z^{-1}+2.78z^{-2}-1.48z^{-3}+0.34z^{-4}} \quad (4-3)$$

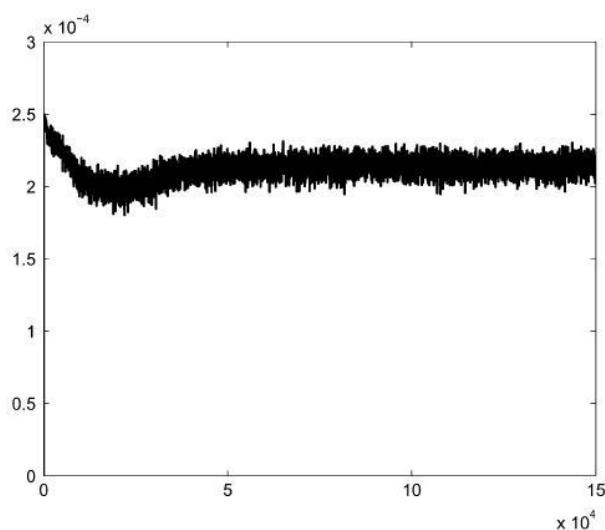
قطب های این سیستم در مکان های $Z_{3/4} = 0.5 \pm j0.2$ و $Z_{1/2} = 0.8 \pm j0.5$ قرار دارند. رابطه ورودی خروجی سیستم بدون حافظه غیرخطی، کما فی السابق در نظر گرفته شده است. در این شبیه سازی به جز ورودی که یک سیگنال گاوی رنگی است که توسط پردازش یک نویز سفید گاوی توسط فیلتر $H_k(z) = 1 + 0.5z^{-1}$ بدست آمده است، مابقی شرایط همانند آزمایش قبل در نظر گرفته شده است. به علت دینامیک های بزرگتر در زیر سیستم خطی، برای فیلتر تطبیقی وضعیت همگرائی بسیار مشکل تر خواهد بود. شکل ۲ - ۴ میزان میانگین مربع خطا برای این سیستم را در هر دو الگوریتم نشان می دهد. ضرائب سیستم ناشناخته، مقدار میانگین ضرائب فیلتر تطبیقی و مقدار کوواریانس بعد از همگرائی نیز در جدول ۲ - ۴ نشان داده شده اند[3]. در این آزمایش نیز الگوریتم ارائه شده دارای عملکرد پایدار می باشد. همچنین الگوریتم ارائه شده همگرایست، در حالیکه الگوریتم مبتنی بر فیلتر کالمون حتی پس از ۱۵۰۰۰ تکرار نیز همگرا نمی شود. مقدار میانگین اندازه قدم نیز در شکل ۳ - ۴ مشخص شده است.



شکل ۲ - ۴ تخمین مربع خطای هر دو الگوریتم تطبیقی

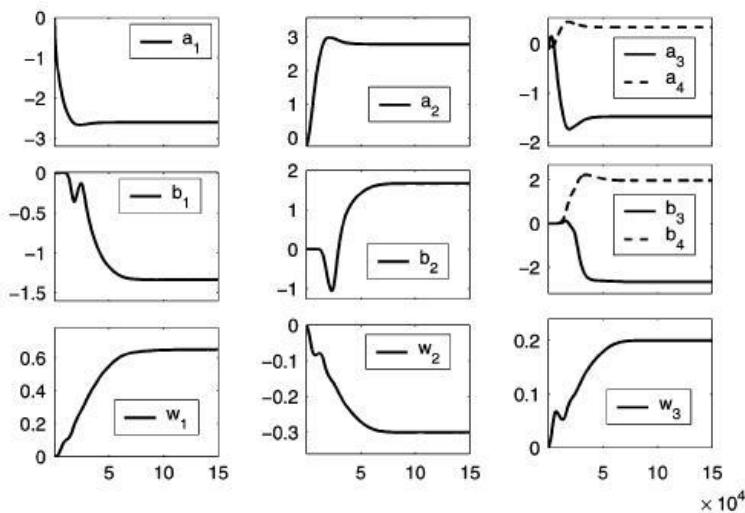
Coefficient	True value	Mean	Variance $[10^{-4}]$
a_1	-2.6	-2.6005	0.0716
a_2	2.78	2.7810	0.4109
a_3	-1.48	-1.4807	0.3301
a_4	0.34	0.3402	0.0363
b_0	1	-	-
b_1	-1.3334	-1.3333	1.7014
b_2	1.6667	1.6643	5.9578
b_3	-2.6665	-2.6626	5.8153
b_4	1.9666	1.9646	2.1292
p_1	0.4	0.3994	0.3344
p_2	-0.3	-0.2998	0.1632
p_3	0.2	0.1999	0.0210

جدول ۲ - ۴ مقایسه عملکرد دو فیلتر تطبیقی



شکل ۳ - ۴ مقدار میانگین اندازه قدم

همچنین تغییرات ضرائب سیستمهای خطی و غیرخطی در شکل زیر آمده است.



شکل ۴ - تغییرات ضرائب فیلتر

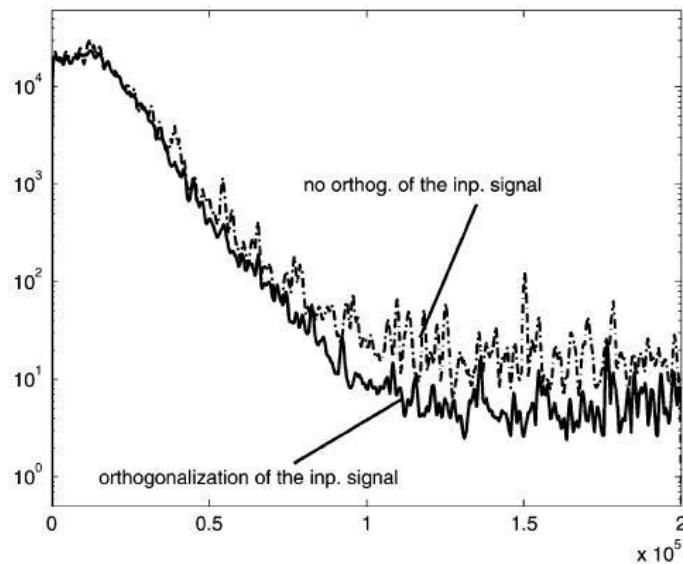
ملاحظه می شود ضرائب $\hat{a}_i(n)$ و $\hat{b}_j(n)$ با نرخ تقریباً $\hat{\omega}_\ell$ برابر همگرا می شوند، در حالیکه ضرائب $\hat{a}_i(n)$ تا حدودی سریعتر همگرا می شوند. این نتایج بیانگر آن هستند که انتخاب اندازه قدم توسط معادله ۳ - ۵۰ به عملکرد پایدار سیستم IIR فیلتر تطبیقی خواهد شد. از آنجائی که معمولاً تقریب اولیه خطابزرگ است، مقدار اولیه اندازه قدم ها کوچک هستند.

مسئله متعامدسازی بردار ورودی به زیر سیستم چند جمله ای، زمانی نمود بیشتری پیدا می کند که زیر سیستم چند جمله ای نیاز به مدلی با درجه بالاتر داشته باشد. این مسئله به این دلیل است که گسترش مقادیر ویژه ماتریس خود همبستگی بردار ورودی به زیر سیستم چند جمله ای برای سیستم های با درجه بالاتر، بیشتر می باشد. برای مقایسه یک سیستم تطبیقی در حضور متعامدساز و در عدم حضور آن، فرایندی شامل چند جمله ای

$$z(n) = 1.4x(n) + 0.7x^2(n) + 1.2^3(n) + 0.9x^4(n) + 1.2x^5(n) \quad (4-4)$$

و یک سیستم خطی که تابع تبدیل آن توسط معادله ۲ - ۴ ارائه می شود را در نظر می گیریم. در شکل ۴ - ۵ مقدار میانگین مربع خطای پنجره لغزان برای دو فیلتر با طول پنجره ۵۰ نمونه نشان داده شده است. جهت نمایش بهتر اختلاف، عمل میانگین گیری نیز صورت گرفته است. با مقایسه دو روش مبتنی بر متعامدسازی و عدم متعامدسازی، ملاحظه می شود که سرعت همگرائی قابل مقایسه می-

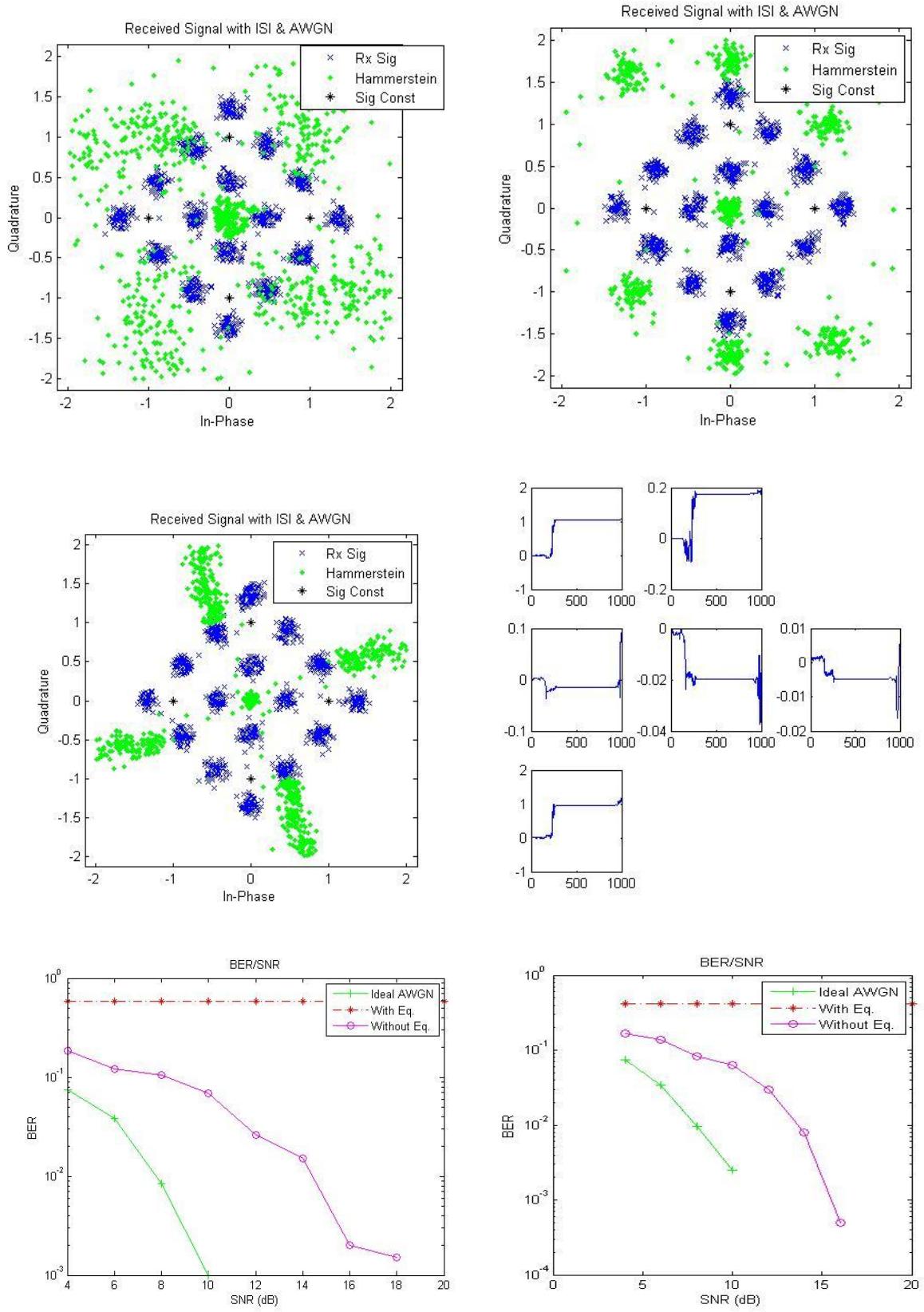
باشد. همچنین روش بدون استفاده از متعامدساز خطای MSE بیشتری دارد. در عین حال هر دو روش همواره همگرا خواهند بود.



شکل ۵ - ۴ تأثیر متعامدسازی در پیاده سازی الگوریتم

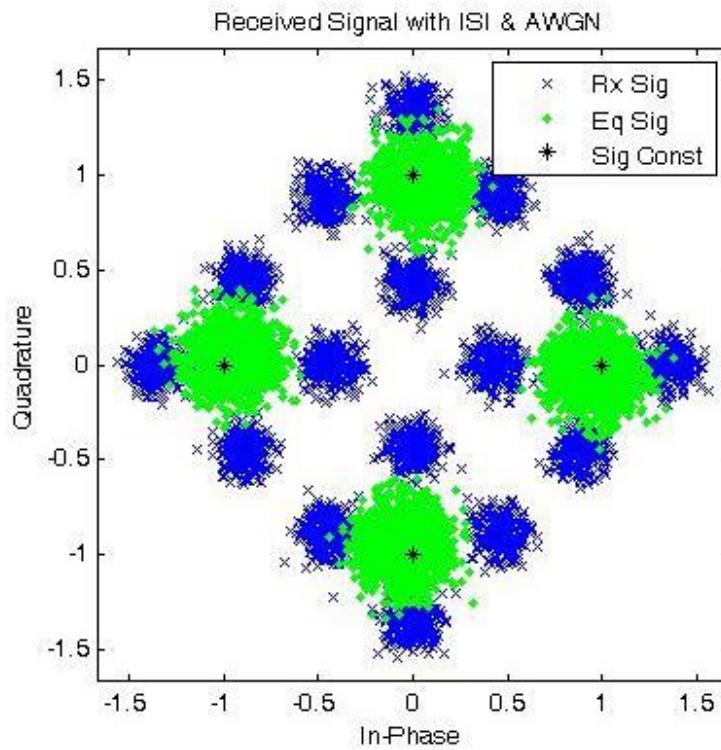
آنچه ارائه شد، خلاصه‌ای از بخش مهمی از گیرنده یک سیستم مخابراتی، بلوک متعادلسازی، بوده است. پس از بررسی آن و انواع مختلف متعادلساز، بنا به دلایلی که پیش‌تر ذکر شد، الگوریتمی برای متعادلسازی تطبیقی کور به نام همرشتاین فیلترینگ انتخاب شده است. این مدل شامل یک قسمت استاتیک غیرخطی است که توسط بخش خطی دینامیک بازگشته دنبال می‌شود. در این سیستم از اعمال دنباله اندازه قدم جهت فعالیت پایدار کل مجموعه بهره گرفته می‌شود. با استفاده از نتایج شبیه سازی می‌توان گفت، با توجه به پایداری مناسب و همچنین همگرائی سیستم، جاذبه زیادی برای استفاده از این روش در شناسائی سیستم‌های غیرخطی وجود خواهد داشت.

ضمیمه ۱ : نتایج پیاده سازی الگوریتم توسط برنامه MATLAB

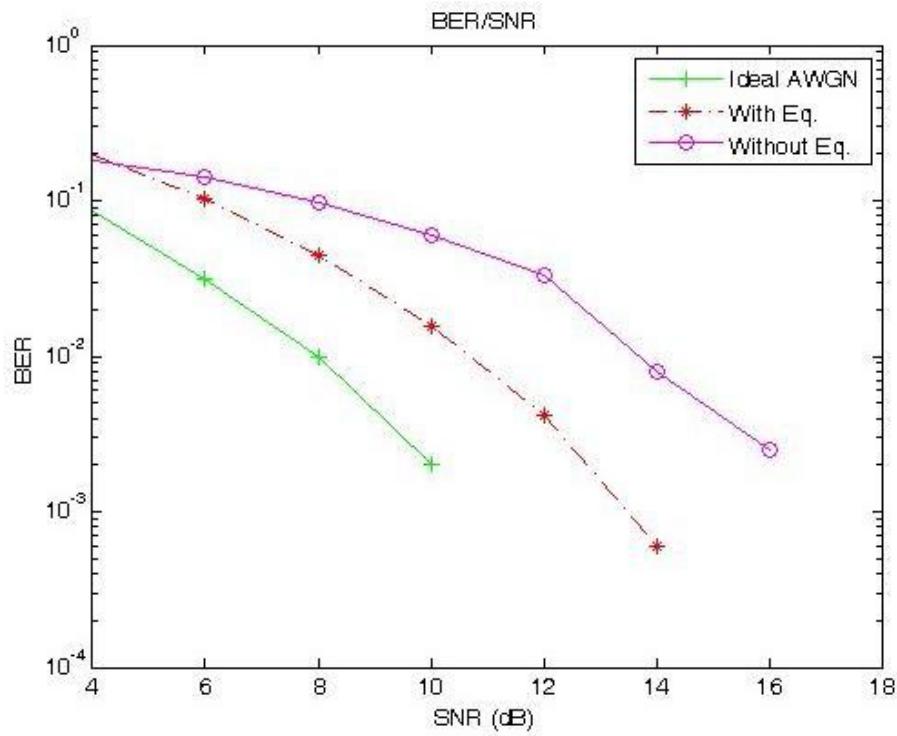


ضمیمه ۲: نتایج پیاده سازی الگوریتم LMS

Signal Constellation



BER/SNR



منابع و مأخذ

- [1] F. Guo and V. R. China, “A New Identification Methode for Wiener and Hammerstein Systems” Doktors Dissertation, Institut fur Angewandte Informatik, Februar 2004.
- [2] O. Gurrapu, “Adaptive Filter Algorithms for Channel Equalization” Masters’s Programme in Electrical Engineering-Communication and Signal Processing, Institutionen Ingenjorshogskolan, 1/2009.
- [3] J. Jeraj and V. J. Mathews, “A Stable Adaptive Hammerstein Filter Employing Partial Orthogonalization of the Input Signals” IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 54, NO. 4, April 2006.
- [4] H. Amindavar and B. H. Naeeni, “Performance of Per Tone Hammerstein And Bilinear Recurrent Neural Network Equalizer for Wireless OFDM System” Authorized licensed use limited to: University of Malaya. Downloaded on February 8, 2010 at 22:28 from IEEE Xplore, 1-4244-0779-6/07/\$20.00 ©2007 IEEE.
- [5] A. H. Sayed, “Adaptive Filters” University of California Los Angeles, A John Wiley & Sons, INC., Publication, 2008.
- [6] H. A. Bakhshi and M. Pooyan, “Using Nonlinear Filter for Adaptive Blind Channel Equalization” proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Telecommunications and Informatics, Istanbul, Turkey, 2006.
- [7] J. G. Proakis and M. Salehi “Digital Communications” Mc Graw Hill Higher Education, 5th Edition, 2008.
- [8] A. Goldsmith, “Wireless Communications” Copyright by Cambridge University Press, 2005.
- [9] G. Mzyk, “Nonlinearity Recovering in Hammerstein System from Short Measurement Sequence” IEEE Signal Processing Letters, Vol. 16, No. 9, September 2009.
- [10] Gram-Schmidt Process & Inner product, http://en.wikipedia.org/wiki/Gram%20%93Schmidt_process.

پایان